° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A-0-12-697

THESE de DOCTEUR-INGENIEUR

présentée

à l' UNIVERSITE PIERRE et MARIE CURIE

(PARIS VI)

Spécialité : Physique

Mention : électrotechnique

par

Monsieur Mohamad KORDAB .

pour obtenir le grade de DOCTEUR-INGENIEUR

Sujet : Contribution à l'étude d'inducteurs de machines hétéropolaires supraconductrices .
Réalisation et essais d'un inducteur supraconducteur "plat" à vingt pôles .

Soutenue le juin 1976 devant la commission composée de :

MM.	G. FOURNET	:	Président
	P. BURNIER J.P. CHABRERIE A. MAILFERT M. RENARD C. RIOUX		Examinateurs

Examinateurs

P. BUHNIER
J.P. CHABRERIE
A. MAILFERT
M. RENARD
C. RIOUX

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548102_0024

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A-0-12-697

THESE de DOCTEUR-INGENIEUR

présentée

à l' **UNIVERSITE PIERRE et MARIE CURIE**
(PARIS VI)

Spécialité : Physique

Mention : électrotechnique

par

Monsieur Mohamad KORDAB

pour obtenir le grade de DOCTEUR-INGENIEUR

Sujet : Contribution à l'étude d'inducteurs de machines hétéropolaires supraconductrices .
Réalisation et essais d'un inducteur supraconducteur "plat" à vingt pôles .

Soutenue le juin 1976 devant la commission composée de :

MM.	G. FOURNET	:	Président
	P. BURNIER J.P. CHABRERIE A. MAILFERT M. RENARD C. RIOUX		Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A ma femme

à mes parents

et à mon cher oncle

Qu'il me soit permis de remercier ici

Messieurs les professeurs BONNEFILLE ET FOURNET qui m'ont accueilli au LGEP et m'ont ainsi permis de réaliser ces travaux dans les meilleurs conditions. Je suis particulièrement honoré par la présence dans ce jury de Monsieur le Professeur FOURNET qui a bien voulu en assurer la présidence, et dont l'aide m'a permis de surmonter bien des difficultés.

Que Monsieur le Professeur MAILFERT, qui m'a proposé cette étude et n'a cessé de me prodiguer aide et conseils ; trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens vivement à remercier Monsieur CHABRERIE qui dirige ces recherches de très près. Ses nombreuses suggestions et ses critiques bienveillantes ont constitué une aide précieuse dans la rédaction de cette thèse.

Je suis très reconnaissant de l'intérêt que Monsieur BURNIER ainsi que Messieurs les professeurs RIOUX et RENARD ont porté à mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie vivement Messieurs BOYER et SAINT-MICHEL pour leur collaboration efficace et leurs critiques amicales.

Je tiens également à faire part de toute ma gratitude à

Messieurs ARMANGAUD, BARATA, CARRIE, COLOMBEAU, GARNIER et UDRY pour leur aide et leur suggestions lors de la construction de l'inducteur.

Monsieur G. BRONCA du C.E.N. de Saclay qui nous a permis d'expérimenter notre réalisation dans son service.

Mesdames BEAUDUCEL et BIZI pour la dactylographie et les dessins de ce manuscript.

Monsieur ROBERT J. qui a permis la reproduction de cette thèse. Madame GAVIGNAUD et Madame BRISSARD qui l'ont effectuée.

T A B L E DES M A T I E R E S

CHAPITRE 1

GENERALITES

Page

1.1 INTRODUCTION. 1

1.1.1 Machines "Cylindriques "supraconducteurs . 5
1.1.2 Machines "plates " supraconducteurs. . . . 8

1.2 OBJET DE LA THESE 11
1.3 CONSIDERATIONS FONDAMENTALES SUR LA CONSTRUCTION DES INDUCTEURS SUPRACONDUCTEURS 11

CHAPITRE 2

CALCUL DE QUADRUPLES SUPRACONDUCTEURS DE FORMES PARTICULIERES

2.1 GENERALITES 15

2.1.1 Cas d'un multipôle parfait. 15

2.1.1.1 Définition, rappel des expressions du champ et de l'énergie magnétique 15
2.1.1.2 Calcul des efforts électromagnétiques s'éxerçant sur un quadrupôle parfait ; sans écran ferromagnétique. 17
2.1.1.3 Multipôle parfait possédant un écran ferromagnétique concentrique. 17
2.1.1.4 Calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur multipôle parfait entouré avec écran ferromagnétiques 25

2.1.2 Cas d'un multipôle à répartition vectorielle mince en présence d'un écran ferromagnétiques. 28

2.2 CALCUL D'UN QUADRUPOLE A REPARTITION SECTORIELLE EPAISSE 32

2.2.1 Calcul du champ magnétique. 32
2.2.2 Calcul de l'inductance propre. 35
2.2.3 Calcul des efforts électromagnétiques . . . 37

2.3 CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE PRODUIT PAR UN QUADRUPOLE A REPARTITION HYPERBOLIQUE POSSEDANT UN ECRAN FERROMAGNETIQUE. 38

2.4 CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE PRODUIT PAR UN QUADRUPOLE A REPARTITION SINUSOIDALE EPAISSE POSSEDANT UN ECRAN FERROMAGNETIQUE. . 40

2.5 CALCUL D'UN QUADRUPOLE LONG DANS LE CAS OU LA SECTION DROITE DES CONDUCTEURS POSSEDE UNE FORME SYMETRIQUE QUELCONQUE 44

2.5.1 Introduction. 44

2.5.2 Calcul de l'induction magnétique produite par un courant circulant dans un conducteur rectiligne de section rectangulaire 48

2.5.3 Calcul de l'induction magnétique produit par un quadrupole à bobines symétriques deux à deux, par rapport aux axes interpolaires, et calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur ses bobines. 56

2.5.3.1 Expression analytique de l'induction magnétique 56

2.5.3.2 Calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur les bobines du quadrupôle 61

2.5.3.3 Calcul numérique de l'induction magnétique et des efforts électromagnétiques. 62

2.5.3.4 Exploitation du programme de calcul. Exemples. 63

2.5.5 Lignes de force de champ magnétique d'un quadrupôle quelconque 76

2.6 OPTIMISATION DE LA FORME DE REPARTITION D'INDUCTEUR 81

2.6.1 Calcul sommaire de la puissance électromagnétique moyenne et de la puissance volumique moyenne 81

2.6.2 Méthode de calcul utilisée pour l'optimisation de la forme de répartition des conducteurs dans l'inducteur. 86

2.7 DIMENSIONNEMENT D'UN INDUCTEURS QUADRUPOLAIRE CYLINDRIQUE A SUPRACONDUCTEUR 96

2.7.1 Réalisation essai pratique. 96

2.7.2 Etude d'un inducteur quadrupolaire cylindrique supraconducteur 101

CHAPITRE 3

Pages

CALCUL, REALISATION PRATIQUE, ESSAI STATIQUE D'UN INDUCTEUR PLAT SUPRACONDUCTEUR D'UNE MACHINE ELECTRIQUE A TROIS ENROULEMENTS.

3.1 INTRODUCTION. 108
3.2. CALCUL DE L'INDUCTEUR. 108

3.2.1 Caractéristiques principales. . . . 108
3.2.2 Expérimentations diverses préliminaires à la construction de l'inducteur 116

3.3. ESTIMATION DES EFFORTS ELECTROMAGNETIQUES S'EXERCANT SUR UN POLE INDUCTEUR ISOLE . 125
3.4. REALISATION ET ESSAI D'UNE BOBINE INDUCTRICE EN FIL SUPRACONDUCTEUR 128
3.5. REALISATION ET ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INDUCTEUR "PLAT" 134
3.6. CONSTRUCTION EY ESSAI DE L'INDUCTEUR . . 143

ANNEXE 1

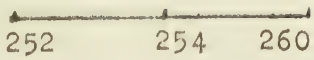
Méthode d'imprégnation des bobinages. 149

ANNEXE 2

CARACTERISTIQUES DES AMENEES DE COURANT UTILISEES POUR LES ESSAIS STATIQUE DE L'INDUCTEUR . . . 149

ANNEXE 3 150

Pages	Lignes	Faux	Corrections
4	Fig. (1.1.a)	$\frac{\ell_s \omega \pi_1}{3 V_1}$	$\frac{\ell_s \omega \pi_1}{3 V_s}$
13	28	de l'état normal à l'état supraconducteur	de l'état supraconducteur à l'état normal
15	16	angle égal à $\frac{2\pi}{p}$	angle égal à $\frac{\pi}{p}$
19	4	en projection	en projetant
32	1	SECTORIELLE EPAISSE	SECTORIELLE EPAISSE POSSEDANT UN ECRAN FERROMAGNETIQUE
32	7	équations (2-32)	équations (2-34)
45	2	"boîte de datte"	"boîte de dattes"
50	14	$\mu_o V^{**}(\eta, \xi)$	$\mu_o \delta V^{**}(\eta, \xi)$
50	21	$a \delta b'_y + i a \delta b' x$	$a \delta b'_Y + i a \delta b' X$
51	5	$\mu_o \frac{j}{2\pi}$	$\mu_o \frac{j}{2\pi}$
51	3	$a \delta b'_x$	$a \delta b'_X$
51	1	$a \delta b'_y$	$a \delta b_Y$
59	12	$\mathcal{J}(\overline{B^{**}} m) c(z)$	$- \mathcal{J}(\overline{B^{**}} m) c(z)$
60	2	$(B \times m)_D)$	$(B \times m)_D$
65		Figure sans numéro	Fig.(2-18)
120		Spire d'entraînement	Spire d'enroulement
121	17	sur un double pas polaire	sur un pas polaire
121	23	sur le double intervalle polaire	sur l'interval polaire
122	Fig.(3.20)	$\overline{\frac{\pi}{4} \quad 0 \quad + \frac{\pi}{4}}$	$\overline{-\frac{\pi}{4} \quad 0 \quad + \frac{\pi}{4}}$
131	Fig.(3.18)	1, 2,3,4,5,6 points de mesure du champ magnétique dans le plan de coupe.	n'existe pas

Pages	Lignes	Faux	Corrections
137	Fig.(3.22)		courbe sans numéro est la courbe moyenne
138	Fig. (3.23)		courbe sans numéro est la courbe moyenne
141	Fig. (3.25)		
remerciement	11	qui dirige	qui a dirigé
	27	manuscript	manuscrit

C H A P I T R E 1

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

GENERALITES

-:-:-:-:-:-

1.1 INTRODUCTION

On estime que les turbo-alternateurs conventionnels sont, à l'heure actuelle, relativement proches de la limite supérieure de la puissance unitaire maximale de ces machines. En effet, cette puissance unitaire est limitée par des impératifs d'ordre mécanique et d'ordre électrique.

- La première limite, d'ordre mécanique, est due aux effets de la force centrifuge sur le rotor. Elle conduit à une vitesse linéaire maximale admissible.
- La deuxième limite, d'ordre électromagnétique, est apportée :
  - . soit par la saturation des matériaux magnétiques utilisés.
  - . soit par les problèmes d'effet Joule dans le circuit d'excitation de la machine et dans l'induit.

L'utilisation de matériaux supraconducteurs pour réaliser l'inducteur de la machine électrique tournante permet d'agir en partie sur la deuxième limitation. Les études ayant analysé l'intéret de l'utilisation des supraconducteurs dans ce domaine sont nombreuses. Le tableau (1-1) présente les machines électriques supraconductrices qui ont déjà fait l'objet de réalisations expérimentales [1].

Tableau (1-1)

La partie de la machine en supra-conducteurs	Puissance	La société constructrice de cette machine	Date de la construction	N° de la Réf.
1) induit tournant S.C.	8 KVA	Etats-Unis, Armée (AVCO)	1966	[2, 3]
2) induit + inducteur S.C.	50 KW	Etats-Unis, Armée de l'air	1967	[4]
3) inducteur S.C. tournant	45 KVA	Etats-Unis MIT	1971	[5]
4) inducteur S.C. tournant	18 KVA	USSR Leningrad	1971	[6]
5) induit tournant S.C.	100 KVA	USSR Moscow	1972	[7]
6) induit tournant S.C.	21 KVA	Allemagne de l'Est	1972	[8]
7) induit tournant S.C.	30 KVA	Japon (Fuji Electric)	1973	[9]
8) Inducteur S.C. tournant	2-3 MVA	Etats-Unis (MIT)	1973	[10, 11]
9) inducteur S.C.	5 MVA	Etats-Unis Westinghouse	1973	[12, 13 14, 15]
10) inducteur S.C.	5 MVA	Etats-Unis Armée de l'air (l'inducteur seulement)	1974	[16]
11) inducteur S.C. tournant	1 MVA	USSR Leningrad	1974	[6]

Les résultats théoriques et expérimentaux ont fait apparaître pour les machines supraconductrices les avantages suivants :

. Augmentation de la puissance volumique.

. Les matériaux ferromagnétiques étant uniquement utilisés dans le rôle d'écrans, la puissance massique est aussi plus élevée.

. La faible valeur de la réactance synchrone d'un cryo-alternateur par rapport à celle d'une machine classique, améliore sa stabilité statique et dynamique. En effet, si nous comparons le diagramme de Potier - réalisé à l'aide du tableau (1-2) - d'un alternateur classique. Fig (1-1-a) - et d'un cryoalternateur -Fig (1-1-b)- pour une tension statorique V_s des puissances active P_1 et réactive π_1 débitées sur le réseau, identiques deux à deux.

Tableau (1-2) : Comparaisons de certaines caractéristiques d'alternateurs classiques et supraconducteurs

	Machine bipolaire		Machine quadrupolaire	
	Classique	S.C. avec B=3,5T au niveau de l'induit	Classique	S.C. avec B = 3,5 T au niveau de l'induit
Diamètre	2,9 m	2,7 m	3,1 m	2,6 m
Longueur	7,8 m	3,6 m	9 m	5 m
Volume	67 m^3	26 m^3	85 m^3	34 m^3
Réactance synchrone	260 %	65 %	245 %	70 %

Nous constatons que la plage de stabilité (arc de courbe MN séparant un point de fonctionnement M du point N correspondant à la limite de stabilité statique) est plus importante pour un régime de fonctionnement déterminé (P_1 et π_1 donnés), pour un cryoalternateur, que pour un alternateur classique.

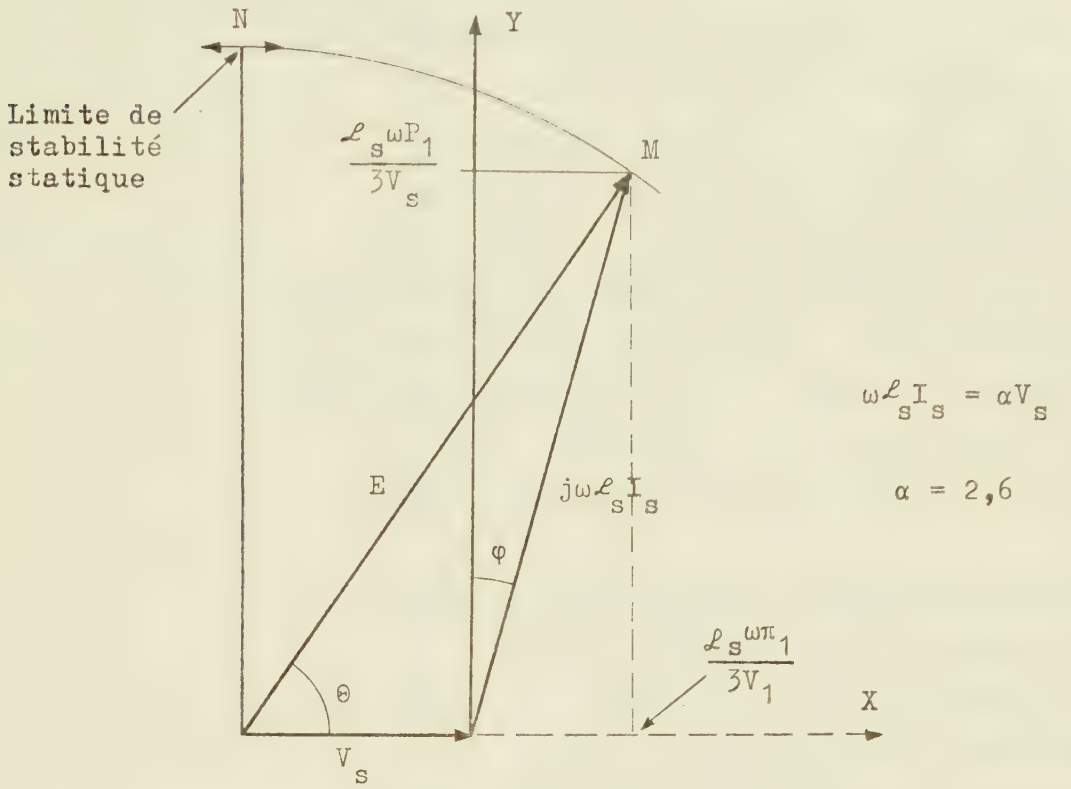


Fig.(1-1-a) alternateur classique (à poles lisses)

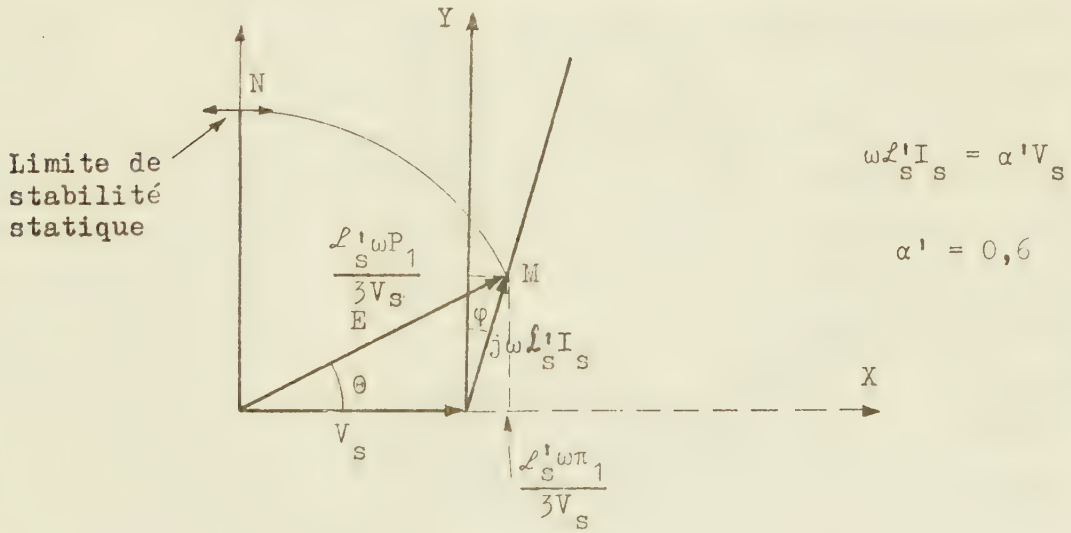


Fig. (1-1-b) Cryoalternateur

ℓ_s, ℓ'_s : inductance cyclique synchrone stator

E : f.e.m. interne

φ : angle de déphasage du courant par rapport à la tension stator

Θ : angle électrique interne de décalage.

Les conceptions actuelles des machines électriques à inducteur supraconducteur sont les suivantes :

1.1.1. Machines "Cylindriques"

a - Machines tournantes à deux enroulements fig. (1-2-a) possèdant un écran électromagnétique entourant l'inducteur supraconducteur, et tournant librement autour de l'arbre de la machine de façon à protéger l'inducteur supraconducteur lors des régimes de défauts. Cette solution a été proposée par J.L. SMITH. L'article cité en [1] donne des précisions sur le rôle exact joué par cet écran.

b - Machines tournantes à trois enroulements fig. (1-2-b). Ces machines possèdent en plus de l'inducteur, en supraconducteur, et de l'induit : un troisième enroulement dit "enroulement auxiliaire" porté par un arbre entrainé directement par la turbine. L'inducteur supraconducteur est libre de tourner à l'intérieur de cet arbre. L'enroulement auxiliaire est parcouru par un courant proportionnel à la composante active du courant d'induit avec une constante de proportionnalité choisie de manière à annuler le couple s'exerçant sur l'inducteur. Cette solution a été proposée par MM. A. MAILFERT et M. RENARD [18], elle a pour avantage :

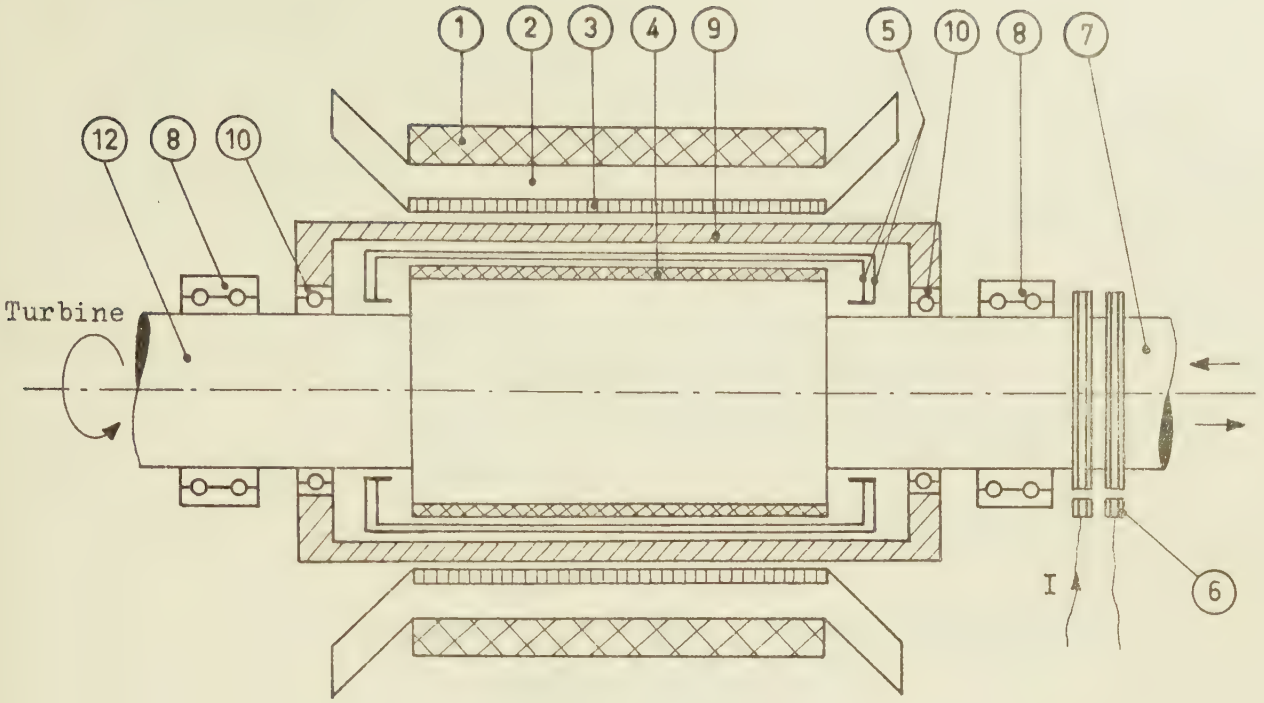


Fig (1-2- a)

Schéma d'une machine à deux enroulements avec écran type SMITH

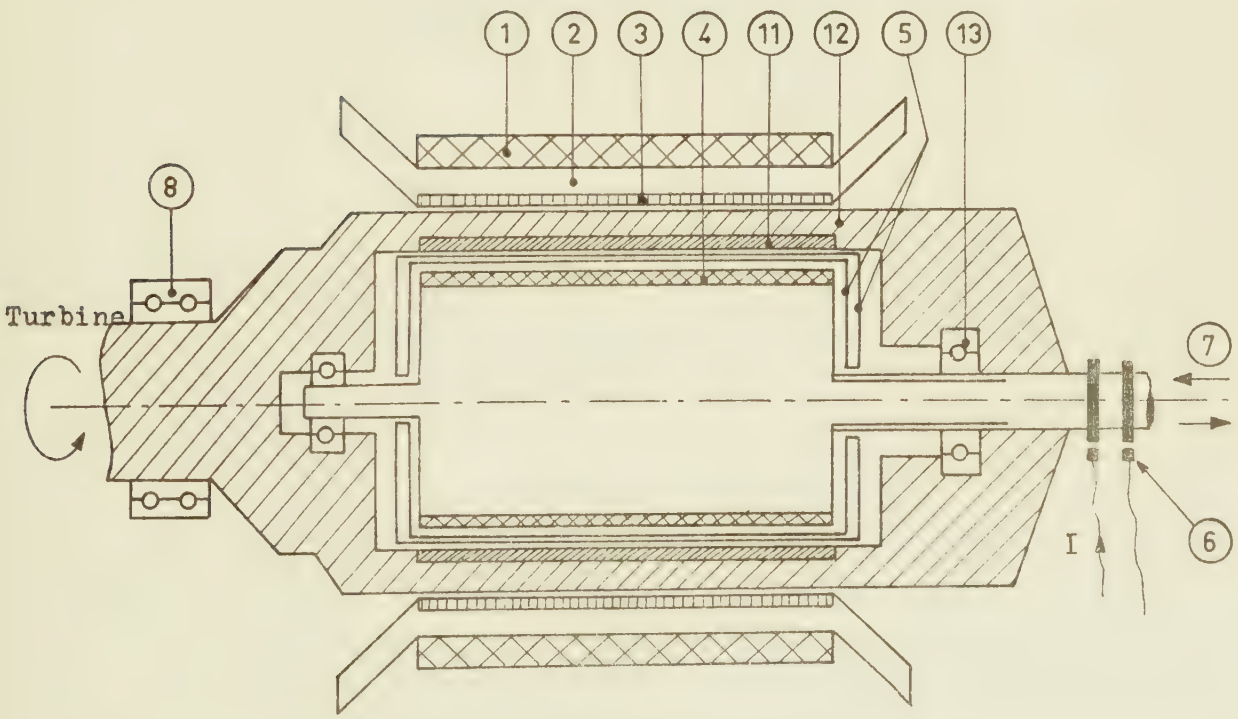


Fig (1-2 - b)

Schéma d'une machine synchrone à trois enroulements du type MAILFERT et RENARD

Fig. (1.2.a.) et Fig. (1.2.b.)

1. Blindage du stator (couronne en matériau ferromagnétique feuilleté)
2. Stator
3. Enroulements de l'induit
4. Enroulement inducteur (en supraconducteur)
5. Cryostat
6. Contacts glissants d'alimentation de l'inducteur
7. Entrée et sortie de l'hélium liquide et gazeux
8. Palier du rotor
9. Ecran électromagnétique libre
10. Paliers de l'écran électromagnétique libre
11. Enroulement auxiliaire (3ème enroulement)
12. Arbre entrainé par la turbine
13. Palier de l'inducteur.

- De blinder l'inducteur (rôle joué par l'écran de SMITH)
- D'améliorer le bilan thermique de l'ensemble, en supprimant les pertes thermiques dues à l'arbre de transmission de couple sur l'inducteur.
- D'améliorer les possibilités de réglage d'une génératrice débitant sur un réseau d'énergie.

1.1.2. Machines "plates"

Les machines électriques décrites précédemment peuvent se concevoir dans une géométrie orthogonale à la précédente. Ces machines peuvent être conçues avec ou sans enroulement auxiliaire. Dans le cas où un tel enroulement existe, un brevet français pris par BOYER [20] décrit la constitution d'une telle machine dont le schéma de principe est présenté sur la fig. (1-3). L'inducteur est constitué d'un ensemble de bobines élémentaires plates situées dans un plan perpendiculaire à l'axe de la machine, à la périphérie d'un disque isolant constituant le support de cet inducteur.

L'induit est placé de part et d'autre de l'inducteur dans le sens axial et séparé de ce dernier par les enroulements auxiliaires qui ont pour but de compenser le couple sur l'inducteur.

Des calculs effectués par D.F. WARNE et M.E. HADLOW [21] sur des machines "plates" à deux enroulements ont montré qu'elles sont intéressantes dans la gamme de puissance comprise entre 10 MVA et 100 MVA.

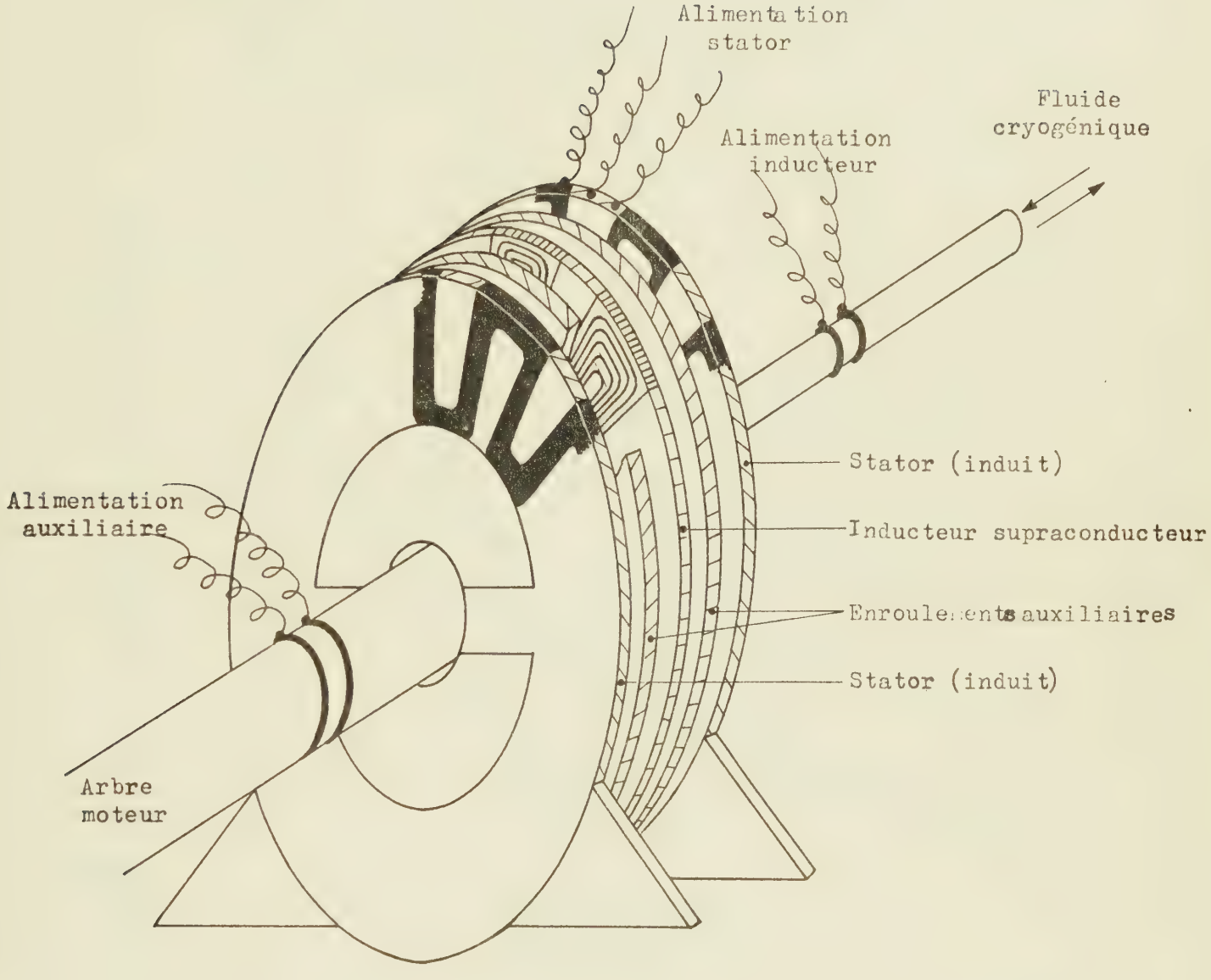


Fig (1-3)

Schéma en perspective d'une machine électrique plate tournante à inducteur supraconducteur et à trois enroulements

La figure (1-4) montre le volume par MVA pour les machines conventionnelles, les machines à supraconducteurs cylindriques et les machines plates à supraconducteurs à deux enroulements.

On constate que la puissance volumique d'une machine plate est supérieure pour la gamme de puissance comprise entre 7 MVA et 100 MVA à celle des machines cylindriques.

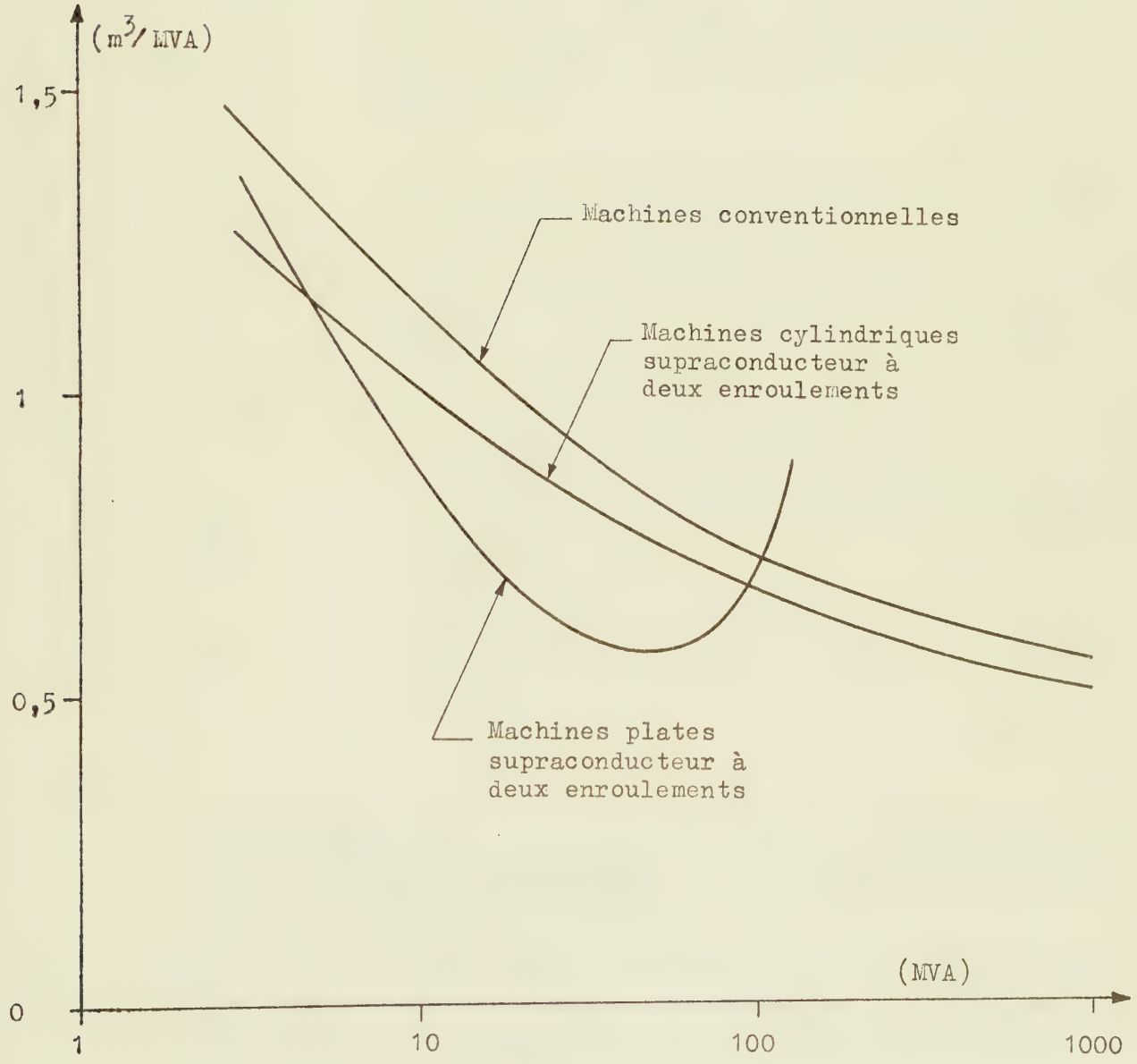


Fig (1 - 4)

1.2. OBJET DE LA THESE

Le travail présenté dans cette thèse comporte deux parties :

- La première partie constitue une contribution au calcul des caractéristiques électromagnétiques et à la conception de différentes formes de quadrupôles supraconducteurs d'une machine électrique cylindrique. nous avons élaboré une méthode de calcul numérique (IBM 360) permettant de calculer l'induction magnétique et les efforts électromagnétiques d'un quadrupôle de forme quelconque.

- La deuxième partie se rapporte à la conception d'un inducteur plat supraconducteur d'une machine électrique tournante à vingt pôles et à trois enroulements. Les principaux problèmes abordés ont été :
  - . le dimensionnement de cet inducteur
  - . la fabrication des bobines élémentaires ainsi que l'étude expérimentale de chacune d'entre-elles
  - . l'assemblage de l'inducteur et son essai statique.

1.3. CONSIDERATIONS FONDAMENTALES SUR LA CONSTRUCTION DES INDUCTEURS SUPRACONDUCTEURS

L'utilisation des supraconducteurs dans les enroulements de l'inducteur des machines électriques amène à changer complètement la technique de construction de ces enroulements.

- Etant donné la valeur très élevée de la densité moyenne de courant dans le supraconducteur et de l'induction magnétique propre produite par ces enroulements inducteurs (plusieurs tesla), les efforts électromagnétiques s'exerçant sur ces enroulements sont très grands. Ces enroulements doivent donc être réalisés de façon à ce que la position relative de deux conducteurs quelconques reste immuable au cours du fonctionnement de l'inducteur.

Si cette condition n'est pas respectée, le mouvement relatif des spires, d'une part perturbe le champ magnétique et risque de provoquer l'apparition de sauts de flux, et d'autre part crée une dissipation d'énergie par friction d'un conducteur sur l'autre. L'élévation de la température qui en résulte peut parfois conduire à la transition du supraconducteur à l'état normal.

De façon à interdire tout mouvement relatif aux conducteurs, il est indispensable d'imprégner très soigneusement le bobinage et de mettre en place une frette capable de contenir les efforts électromagnétiques et centrifuge, qui s'exerçent sur celui-ci.

- les propriétés supraconductrices d'un matériau sont déterminées par la valeur de trois paramètres essentiels :

T : Température de fonctionnement. On doit avoir $T < T_c$ température critique au-dessus de laquelle disparait le phénomène de supraconductivité.

H : Champ magnétique macroscopique moyen appliqué sur le matériau. Ce champ comprend le champ propre dû au courant circulant dans le supraconducteur et le champ appliqué par l'extérieur.

H_{c2} est le champ critique de deuxième espèce au-delà duquel disparait le phénomène de supraconductivité.

J : la densité moyenne de courant parcourant le matériau. J_c appelée densité de courant critique correspond à la densité moyenne maximale admissible par un matériau donné pour des valeurs de T et H déterminées.

Nous avons représenté sur la figure (1-5) l'allure du volume de l'espace T, H, J-(limité par la surface S) dans lequel apparaît le phénomène de supraconductivité.

La température critique de certains alliages comme (Nb-Ti), (Nb-Zr) se situe entre 7°K et 11°K) et leur champ magnétique critique est supérieur à 5 Tesla, [19] . Ceci permet d'utiliser la température de l'hélium liquide à la pression atmosphérique comme température de fonctionnement (4,2°K), ce qui simplifie considérablement le dispositif cryogénique.

Pour conserver l'inducteur à la température de l'hélium liquide, il est indispensable de le placer dans un cryostat qui présente la particularité d'être ici un cryostat tournant.

Ce cryostat alimenté en permanence en hélium liquide, nécessite l'utilisation de joints rotatifs particuliers posant encore, à l'heure actuelle, de sérieux problèmes technologiques.

Il faut prévoir aussi un système permettant à l'hélium gazeux de s'échapper rapidement en cas de transition résistive du bobinage, c'est-à-dire du passage brusque du matériau de l'état normal à l'état supraconducteur.

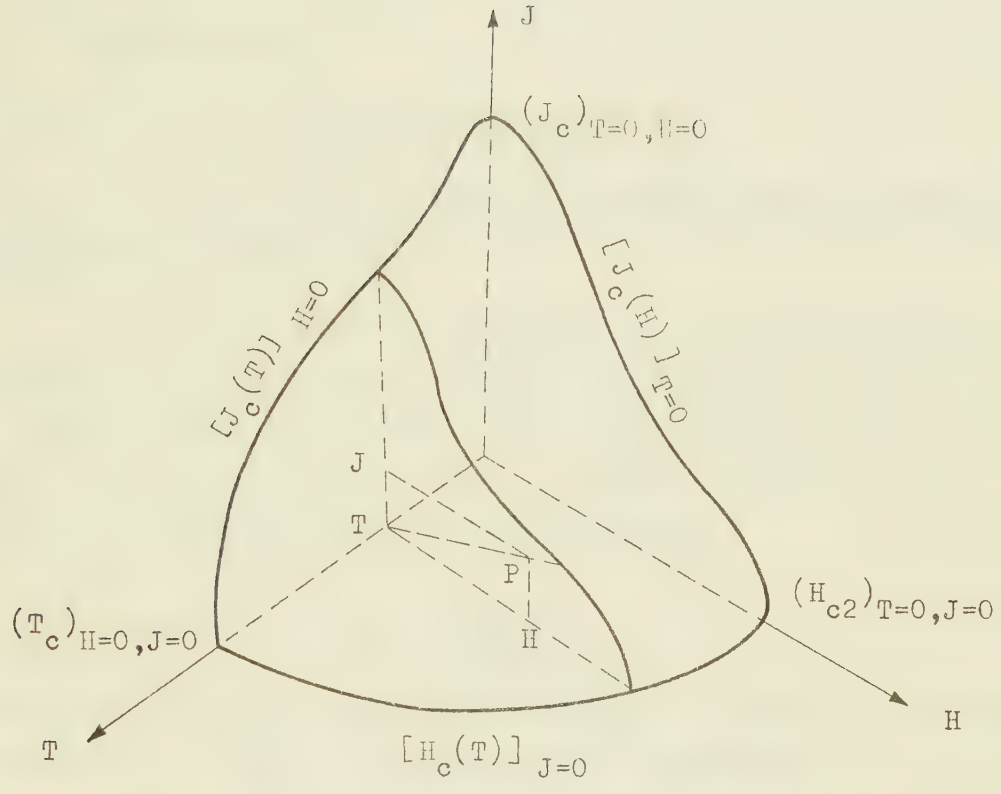


Fig (1 - 5)

Pour obtenir une consommation d'hélium liquide aussi faible que possible, il faut pourvoir le cryostat d'un écran thermique de façon à diminuer les pertes par rayonnement. Cet écran réalisé en matériau de très bonne conductivité thermique, est refroidi à une température aussi voisine que possible de la température de fonctionnement du supraconducteur. Ceci peut être avantageusement réalisé grâce à la récupération d'enthalpie du gaz hélium vaporisé par le flux thermique entrant dans le cryostat.

C H A P I T R E 2

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

CALCUL DE QUADRUPOLES SUPRACONDUCTEURS DE FORME PARTICULIERE

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

2.1. GENERALITES

2.1.1. Cas d'un multipôle parfait

2.1.1.1. Définition, rappel des expressions du champ et de l'énergie magnétiques

Considérons un ensemble de conducteurs filiformes, rectilignes indéfinis, suivant Oz jointifs, formant une nappe de courant cylindrique d'épaisseur négligeable devant le rayon R du cylindre et supposons que la densité superficielle de courant en $A.m^{-1}$ soit répartie sinusoïdalement

$$J = J_m \cos p\theta \qquad (2.1)$$

où p est le nombre de paire de pôles, chaque pôle occupant un angle égal à $\frac{2\pi}{p}$. La figure (2.1) représente un quadrupôle parfait pour lequel p = 2. Pour les schémas, nous adopterons une représentation commode de ces couches multipolaires à l'aide d'une spire, pour chaque paire de pôles. Cette spire étant matérialisée par deux conducteurs (aller et retour) disposés à l'endroit où la densité de courant est maximale.

On sait [22] que ce multipôle parfait est caractérisé par les grandeurs suivantes :

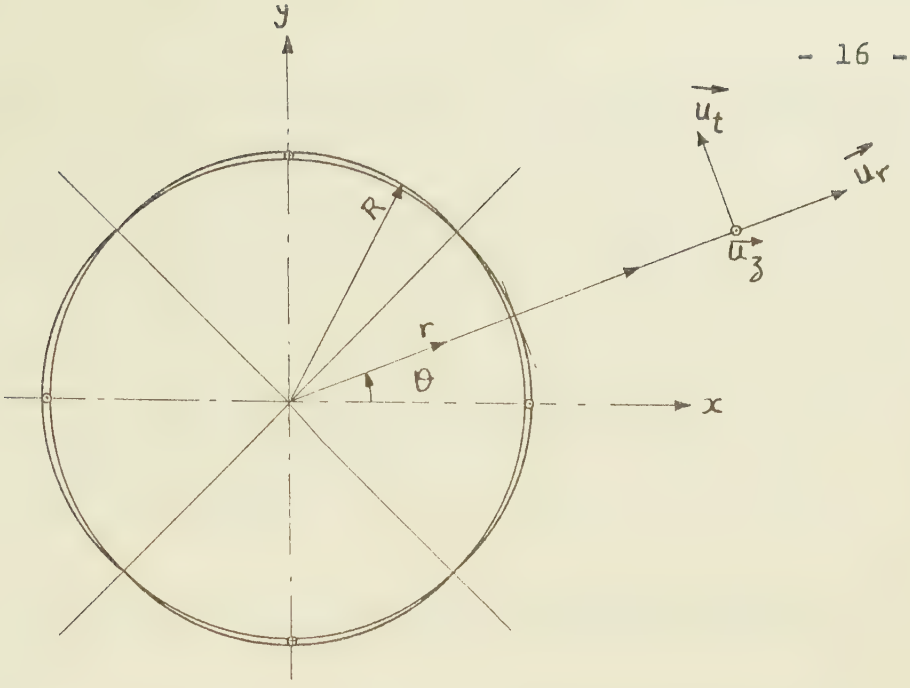


Figure (2.1.) Quadrupôle parfait (p = 2)

- Champ magnétique à l'intérieur de la nappe de courant

$$H_{ri} = -\frac{J_m}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \sin p\theta$$

$$H_{ti} = -\frac{J_m}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \cos p\theta \qquad (2-2)$$

- Champ magnétique à l'extérieur de la nappe de courant

$$H_{re} = -\frac{J_m}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \sin p\theta$$

$$H_{te} = +\frac{J_m}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \cos p\theta \qquad (2-3)$$

- Energie magnétique emmagasinée par unité de longueur.

$$W_{m\,(j\,m^{-1})} = \mu_o \frac{\pi}{4} \frac{R^2 J_m^2}{p} \qquad (2-4)$$

2.1.1.2. Calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur un quadrupôle parfait : sans écran ferromagnétique

Les efforts électromagnétiques s'exerçant sur les nappes de courant constituant le multipôle étudié précédemment peuvent être calculés :

- soit à l'aide de l'expression donnant la densité volumique d'efforts de Laplace :

$$\vec{f}_{(n.m^{-3})} = \vec{J}_{(A.m^{-2})} \wedge \vec{B}_{(T)}$$

avec J et B densité de courant et induction magnétique au point considéré.

- soit, à l'aide du tenseur de contraintes de Maxwell. Dans ce cas, l'effort global s'exerçant sur un volume τ de matériau rigide limité par une surface S s'écrit [23] : (cf. fig. 2.2)

De la Fig. (2.2.a) on écrit :

$$\vec{F} = \iiint_{\tau} \vec{f}\, d\tau = \iint_{S(\tau)} \vec{\vec{T}} \cdot \vec{n}_s\, ds$$

$$= \iint_{S(\tau)} \mu \left[(\vec{H} \cdot \vec{n}_s\, ds).\vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{n}_s\, ds \right] \quad (2\text{-}5)$$

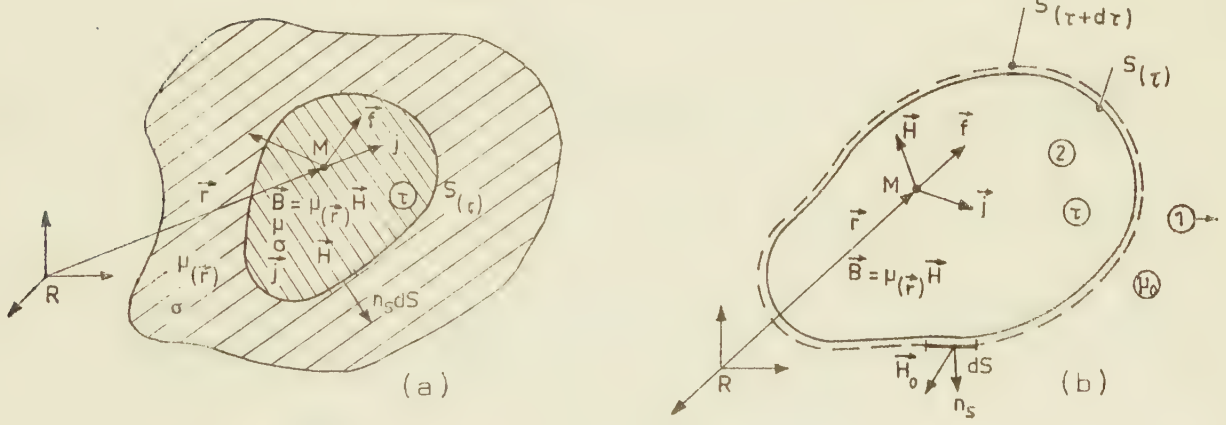


Fig. (2.2) : les efforts s'exerçant sur un volume τ de matière délimitée par la surface $S(\tau)$

et de la fig. (2.2.b) :

$$\vec{F} = \iiint_{\tau} \vec{f}\, d\tau = \iint_{S(\tau+d\tau)} \vec{\vec{T}}_o \cdot \vec{n}_s\, ds$$

$$= \iint_{S(\tau+d\tau)} \mu_o \left[(\vec{H}_o \cdot \vec{n}_s\, ds)\, \vec{H}_o - \frac{H_o^2}{2} \vec{n}_s\, ds \right] \quad (2\text{-}6)$$

avec

μ : perméabilité magnétique du matériau (fonction de point).

μ_o : perméabilité magnétique du vide entourant le matériau considéré

$\vec{J}, \vec{H}, \vec{F}$: vecteurs densité de courant électrique champ magnétique, densité de force au point $M(\vec{r})$

$\vec{B} = \mu_{(r)} \vec{H}$: vecteur induction magnétique au point M(r)

$\vec{H_o}$: champ magnétique dans le milieu (1) (vide par exemple)

$\vec{m_s}$: vecteur unitaire normale sortant du volume.

En appelant $\vec{u_r}$ $\vec{u_t}$ $\vec{u_z}$ les vecteurs unitaires du système de coordonnées cylindriques, et en posant $dS = R\, \ell\, d\theta$ avec ℓ_r longueur du multipôle, l'effort résultant qui s'exerce sur un demi pôle du système, occupant un arc égal à $\frac{\pi}{2p}$ a pour expression, par unité de longueur du multipôle :

$$\vec{F}_{(m.m^{-1})} = \vec{Fi} + \vec{Fe}$$

avec

$$\vec{F_i} = \mu_o R \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \left[\frac{H_{ti}^2 - H_{ri}^2}{2} \vec{u_r} - H_{ri} H_{ti} \vec{u_t} \right] d\theta$$

et

$$\vec{F_e} = \mu_o R \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \left[\frac{H_{re}^2 - H_{te}}{2} \vec{u_r} + H_{re} H_{te} \vec{u_t} \right] d\theta$$

Les valeurs des composantes du champ étant prises en r = R, il vient donc : avec $H_{r_e} = H_{r_i}$ et $H_{t_e} - H_{t_i} = J$

$$\vec{F} = \mu_o R \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \left[\frac{H_{ti}^2 - H_{te}^2}{2} \vec{u_r} + (Hre\, Hte - Hri\, Hti) \vec{u_t} \right] d\theta \quad (2-7)$$

$$\vec{F} = \vec{Fi} + \vec{Fe} = -\mu_o R \int_o^{\frac{\pi}{2p}} \left[\frac{H_{te}^2 - H_{ti}^2}{2} \vec{u_r} + \frac{J_m^2}{4} \sin 2p\theta \, \vec{u_t} \right] d\theta$$

Soit en remarquant que $H_{t_e}^2 = H_{t_i}^2$

$$\vec{F} = -\mu_o \frac{R J_m^2}{4} \int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta \, \vec{u_t} \, d\theta \qquad (2-8)$$

. et en projection sur deux axes orthonormes Ox et Oy tracés dans les directions $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ et pour le demi-pôle centré en $\theta = 0$, on en déduit :

$$F_x = +\mu_o \frac{R J_m^2}{4} \int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$F_x = +\mu_o R \frac{J_m^2}{8} \left[\frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{2p}}{(2p-1)} - \frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2p}}{(2p+1)} \right] \qquad (2-9)$$

$$F_y = -\mu_o \frac{R J_m^2}{4} \int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$F_y = +\mu_o \frac{R J_m^2}{4} \left\{ \frac{1}{2p+1} \left[\cos(2p+1)\frac{\pi}{2p} - 1 \right] + \frac{1}{2p-1} \left[\cos(2p-1)\frac{\pi}{2p} - 1 \right] \right\} \qquad (2-10)$$

Remarque : Pour retrouver ce résultat avec l'expression de la densité d'efforts volumiques, il faut :

- donner une épaisseur fictive e à la nappe, épaisseur que l'on fera tendre vers zéro.

- écrire l'expression de la densité volumique d'efforts de Laplace.

$$\vec{f} = \vec{j_r} \wedge \mu_0 \vec{H} = j_r \mu_0 \left(Hr\, \vec{u_t} - H_t\, \vec{u_r} \right)$$

H_t et H_r sont alors la moyenne de champs magnétiques appliqués sur l'épaisseur de la nappe, il vient donc :

$$H_t = |H_{te}| - |H_{ti}|$$

$$H_r = \frac{|Hre| + |Hri|}{2}$$

avec $ej = J$

La contrainte locale par unité de longueur du multipôle a donc pour expression

$$\vec{dF} = e R j_r \mu_0 Hr\, d\theta\, \vec{u_t} = -\mu_0 R \frac{J_m^2}{4} \sin 2p\theta\, d\theta\, \vec{u_t}$$

expression qui donne dans ce cas particulier les efforts électromagnétiques locaux, par unité de longueur du multipôle et pour un demi pôle ($\theta = \frac{\pi}{2p}$) et les efforts globaux

$$\vec{F} = -\mu_0 \frac{R J_m^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta\, d\theta\, \vec{u_t}$$

formule identique à celle trouvée précédemment (équation (2,8)).

<u>1ère application</u> : cas d'un dipôle parfait (p = 1)

- Les efforts électromagnétiques locaux s'exerçant sur ce dipôle sont présentés sur la figure (2.2.a.)
- Les valeurs de ces efforts sont par unité de longueurs et pour le demi pôle : $0 < \theta < \pi/2$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F_x} &= \mu_o \frac{R\ J_m^2}{6}\ \vec{u_x} \\ \vec{F_y} &= -\mu_o \frac{R\ J_m^2}{6}\ \vec{u_y} \end{aligned}\right\} \qquad (2-11)$$

La figure (2.2.b.) présente les efforts globaux s'exerçant sur un dipôle parfait

2ème application : cas d'un quadrupôle (p = 2) parfait :

- Les efforts locaux sont présentés sur la figure (2.4.a.)
- Les valeurs de ces efforts pour un demi pôle sont

$$\left.\begin{aligned} \vec{F_x} &= \mu_o \frac{R\ J_m^2\ \sqrt{2}}{30}\ \vec{u_x} \\ \vec{F_y} &= -\mu_o \frac{R\ J_m^2 (\sqrt{2}+2)}{30}\ \vec{u_y} \end{aligned}\right\} \qquad (2-12)$$

La figure (2.4.b.) montre les efforts globaux s'exerçant sur un quadrupôle

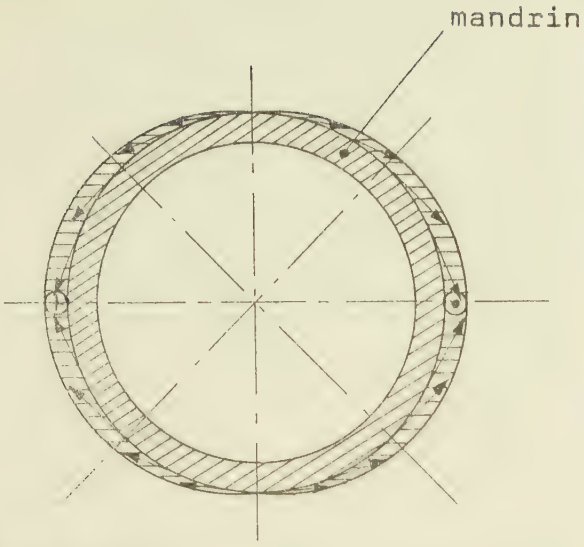


Fig. (2.3.a) Effort locaux s'exerçant sur un dipole parfait

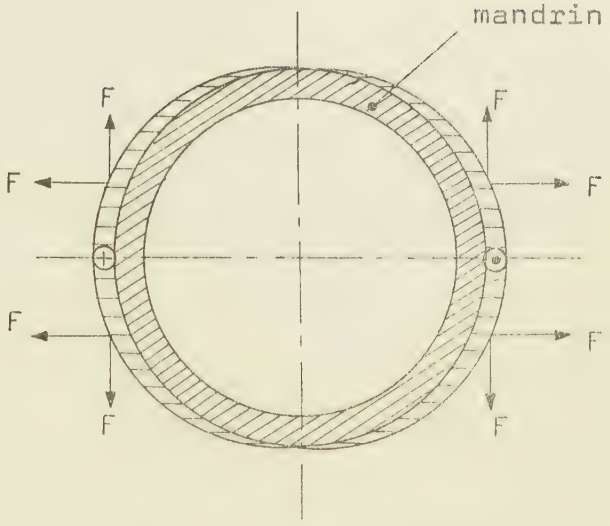


Fig. (2.3.b) Effort globaux s'exerçant sur un dipole parfait

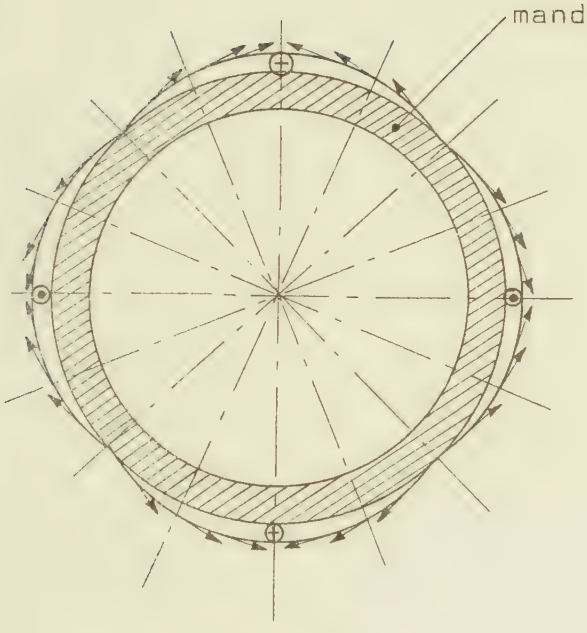


Fig. (2.4.a) Effort locaux s'exerçant sur un quadrupôle parfait

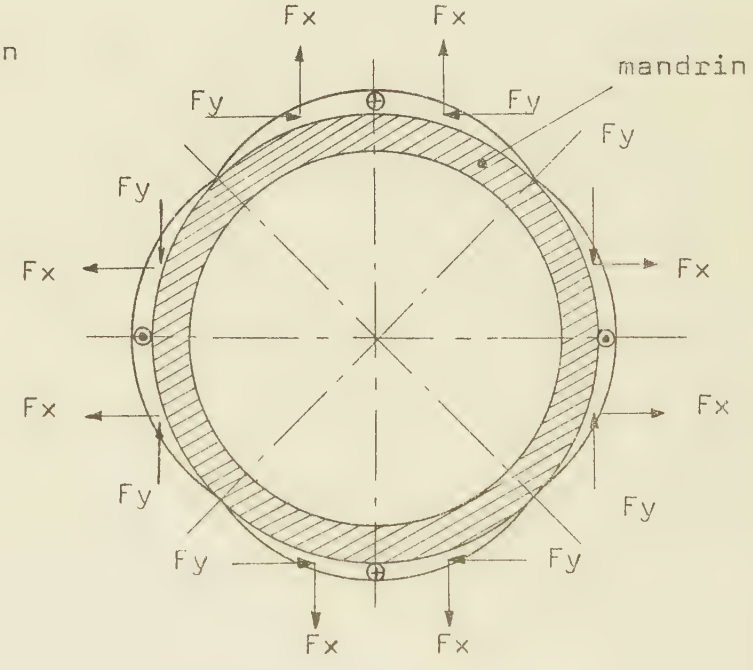


Fig. (2.4.b) Effort globaux s'exerçant sur un quadrupôle parfait

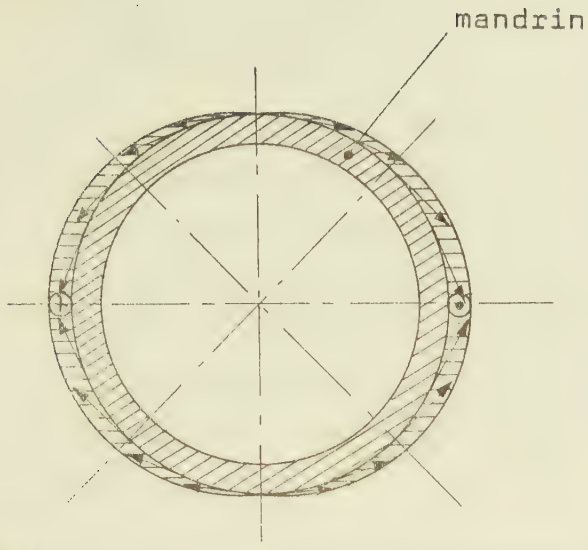


Fig. (2.3.a) Effort locaux s'exerçant sur un dipole parfait

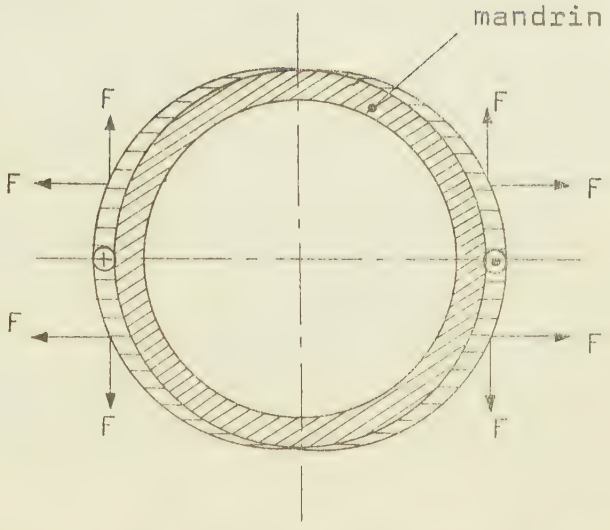


Fig. (2.3.b) Effort globaux s'exerçant sur un dipole parfait

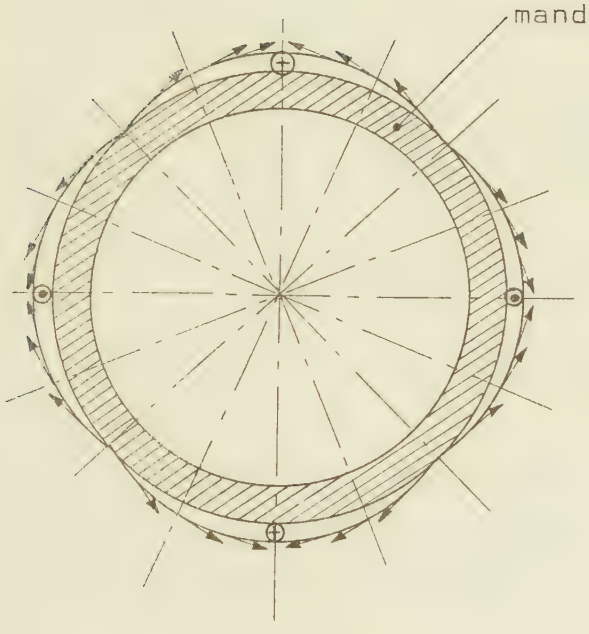


Fig. (2.4.a) Effort locaux s'exerçant sur un quadrupôle parfait

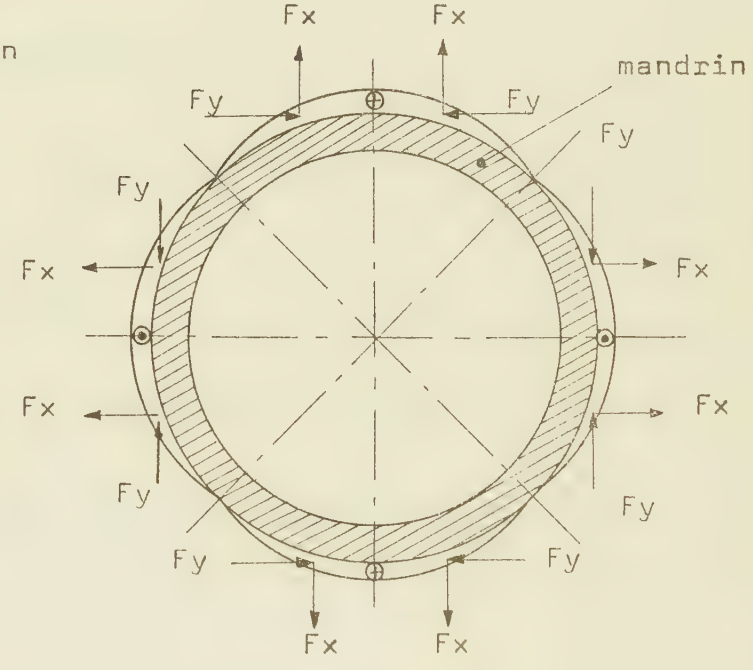


Fig. (2.4.b) Effort globaux s'exerçant sur un quadrupôle parfait

2.1.1.3. Multipôle parfait possédant un écran ferromagnétique concentrique

Nous supposons que le multipôle parfait défini au paragraphe précédent est situé à l'intérieur d'un écran ferromagnétique concentrique, de rayon Rs. Nous allons calculer le champ magnétique produit par ce multipôle équipé de cet écran. Dans la pratique, la présence de cet écran est indispensable, principalement pour limiter le champ de fuite des machines électriques utilisant un tel inducteur supraconducteur multipolaire.

Hors de la nappe de courant, le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire magnétique U

$$\vec{H} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

de div H = 0, on déduit :

$$\nabla U = 0$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ (multipôle infiniment long).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

Cette équation admet pour solution générale

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (A r^n + B r^{-n})(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

où A, B, C, D sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites.

Pour r < R il vient

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} (A' r^n + B' r^{-n})(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

Soit

$$H_{ri} = -\frac{\partial U_i}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} -n(A' r^{n-1} - B' r^{-n-1})(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

$$H_{ti} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_i}{\partial \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} n(A' r^{n-1} + B' r^{-n-1})(C \sin n\theta - D \cos n\theta)$$

Pour $r > R$, on a

$$U_e = \sum_{n=0}^{\infty} (A'' r^n + B'' r^{-n})(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

Soit

$$H_{re} = -\frac{\partial U_e}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} -n (A'' r^{n-1} - B'' r^{-n-1})(C \cos n\theta + D \sin n\theta)$$

$$H_{te} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_e}{\partial \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} n (A'' r^{n-1} + B'' r^{-n-1})(C \sin n\theta - D \cos n\theta)$$

Pour $r = R, \forall \theta$ $H_{t_e} - H_{t_i} = J$ conduit à $n = p$ et $C = A' = 0$ ce qui supprime le signe Σ.

Des autres conditions à savoir :

pour $r = 0$ $\quad H_{t_i} = 0$

pour $r = R$ $\quad H_{r_e} = H_{r_i}$

et pour $r = R_s$ $\quad H_{t_e} = 0$

on déduit les autres constantes, il vient tous calculs faits :

$r < R$

$$H_{ri} = -\frac{J_m}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \left[1 + \left(\frac{R}{R_s}\right)^{2p}\right] \sin p\theta$$

$$H_{ti} = -\frac{J_m}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p-1} \left[1 + \left(\frac{R}{R_s}\right)^{2p}\right] \cos p\theta \qquad (2-14)$$

$R < r < R_s$

$$H_{re} = -\frac{J_m}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \left[1 + \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2p}\right] \sin p\theta$$

$$H_{te} = +\frac{J_m}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2p}\right] \cos p\theta \qquad (2-15)$$

2.1.1.4. Calcul des efforts electromagnetiques s'exerçant sur un multipole parfait entouré avec un écran ferromagnétiques

Les efforts se calculent à l'aide de l'expression (2.7). On obtient donc pour un demi-pôle et par unité de longueur du multipôle avec toujours $H_{r_e} = H_{r_i}$ et d'après (2.14, 2.15)

$$\frac{H_{te}^2 - H_{ti}^2}{2} = -\frac{J_m^2}{2}\left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\cos^2 p\theta$$

Soit

$$\vec{F} = \mu_o R \frac{J_m^2}{2}\left[\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\cos^2 p\theta\, d\theta\ \vec{u_r} - \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\right]\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta\, d\theta\ \vec{u_t}\right] \quad (2\text{-}16)$$

Du fait qu'il s'agit d'une couche mince, là encore la contrainte locale a pour expression

$$\vec{dF} = \mu_o R \frac{J_m^2}{2}\left[\left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\cos^2 p\theta\ \vec{u_r} - \frac{1}{2}\left(1+\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\sin 2p\theta\ \vec{u_t}\right]$$

d'où

$$\vec{F_x} = \mu_o R \frac{J_m^2}{4}\left\{\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\left(\cos 2p\theta + 1\right)\cos\theta\, d\theta + \left[1+\left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\right]\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta \sin\theta\, d\theta\right\}\vec{u_x}$$

$$\vec{F_y} = \mu_o R \frac{J_m^2}{4}\left\{\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\left(\cos 2p\theta + 1\right)\sin\theta\, d\theta - \left[1+\left(\frac{R}{Rs}\right)^{2p}\right]\int_o^{\frac{\pi}{2p}} \sin 2p\theta \cos\theta\, d\theta\right\}\vec{u_y}$$

il en résulte

$$\vec{Fx} = \mu_0 R \frac{J_m^2}{4} \left[\left(\frac{R}{R_S}\right)^{2p} \frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{2p}}{(2p-1)} + \frac{\sin(2p-1)\frac{\pi}{2p}}{2(2p-1)} + \left(\frac{R}{R_S}\right)^{2p} \sin\frac{\pi}{2p} - \frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2p}}{2(2p+1)} \right] u_x \qquad (2-17)$$

$$\vec{Fy} = \mu_0 R \frac{J_m^2}{4} \left\{ \left(\frac{R}{R_S}\right)^{2p} \left[-\cos\frac{\pi}{2p} + \frac{1}{2p-1} \cos(2p-1)\frac{\pi}{2p} + 2\frac{(p-1)}{2p-1} \right] + \frac{1}{2(2p-1)} \left[\cos(2p-1)\frac{\pi}{2p} - 1 \right] + \frac{1}{2(2p+1)} \left[\cos(2p+1)\frac{\pi}{2p} - 1 \right] \right\} \vec{u_y} \qquad (2-18)$$

Applications

1ère application : Cas d'un dipôle parfait (p = 1)

Les valeurs de ces efforts par unité de longueur et pour le demi-pôle sont $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\vec{Fx} = \mu_0 \frac{R J_m^2}{6} \left[1 + 3 \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \right] \vec{u_x} \qquad (2-19)$$

$$\vec{Fy} = -\mu_0 \frac{R J_m^2}{6} \vec{u_y} \qquad (2-20)$$

On constate que les efforts s'exerçant suivant l'axe Oy sont égaux dans les deux cas de dipôle avec et sans écran ferromagnétique.

2ème application : Cas d'un quadrupôle parfait (p = 2)

Les valeurs de ces efforts par unité de longueur et pour un demi-pôle sont

$$\vec{F_x} = \mu_o R \frac{J_m^2 \sqrt{2}}{30} \left[1 + 5 \left(\frac{R}{Rs} \right)^4 \right] \vec{u_x} \qquad (2\text{-}21)$$

$$\vec{F_y} = -\mu_o R \frac{J_m^2}{30} \left[2 + \sqrt{2} + (5\sqrt{2} - 5) \left(\frac{R}{Rs} \right)^4 \right] \vec{u_y} \qquad (2\text{-}22)$$

Le tableau suivant présente une comparaison numérique entre les efforts pour un dipôle et un quadrupôle avec ou sans écran ferromagnétique

Tableau (2.1)

	Inducteur dipolaire		Inducteur quadrupolaire	
	valeurs sans écran ferromagnétique	valeurs avec écran ferromagnétique	sans écran ferromagnétique	avec écran ferromagnétique
Rayon R de l'inducteur	0,1 m	0,1 m	0,1 m	0,1 m
Induction B au niveau de l'inducteur	3 T	3 T	3 T	3 T
Rayon RS de l'écran		=2 R = 0,2m		=2 R = 0,2 m
J_m (densité superficielle maximum)	$0,477 10^7$ A/m	$0,382 10^7$ A/m	$0,477 10^7$ A/m	$0,449 10^7$ A/m
$\frac{Fx}{lr}$/demi pole	$4,76\ 10^5$ N = $48,6 10^3$ kg	$5,37 10^5$ N $54,6\ 10^3$ kg	$13,43\ 10^4$ N $13,7\ 10^3$ kg	$16,19 10^4$ N $16,5\ 10^3$ kg
$\frac{Fy}{lr}$/demi pole	$4,76 10^3$ N = $48,6 10^3$ kg	$30,5 10^4$ N $31,2 10^3$ kg	$32,49 10^4$ N $33,16 10^3$ kg	$42,12 10^4$ N $43\ 10^3$ kg

2.1.2. Cas d'un multipôle à répartition sectorielle mince en présence d'un écran ferromagnétique

Nous supposons que la densité superficielle de courant $J(A.m^{-1})$ possède une répartition sectorielle suivant une couche mince donnée par la figure (2-5). Le rayon de cette couche est R. Un écran coaxial de perméabilité magnétique infini est placé en $r = R_s > R$.

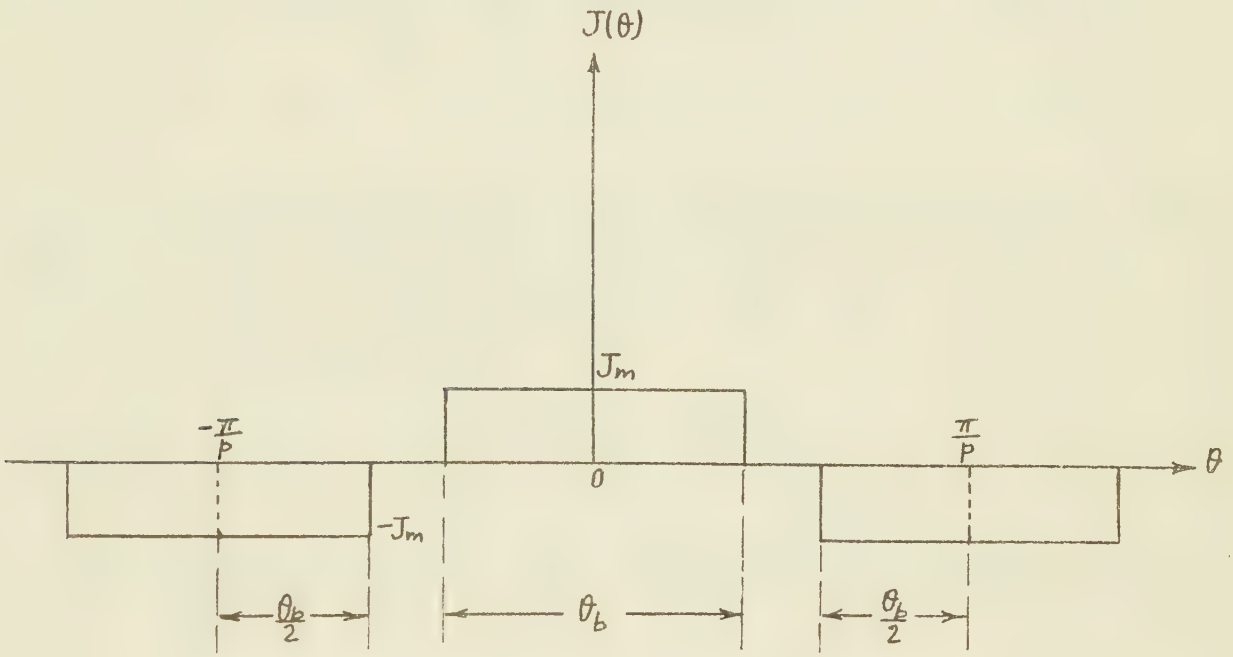


Figure (2-5)

Nous développons $J(\theta)$ en série de Fourier

$$J(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos np\theta \qquad (2-23)$$

avec

$$a_n = \frac{2p}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{p}} J(\theta)\cos np\theta \, d\theta \qquad (2-24)$$

soit en posant

$$\theta_e = p\theta_b \qquad (2\text{-}25)$$

$$a_{2k+1} = \frac{4 J_m}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2} \qquad (2\text{-}26)$$

et

$$J(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos p(2k+1)\theta \qquad (2\text{-}27)$$

Le calcul du champ magnétique dH produit par cette couche mince de répartition multipolaire se fait à l'aide des expressions (2-14), (2-15), en remplaçant J_m par $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}$, et p par p(2k+1) ; on obtient ainsi

- à l'intérieur de la nappe (r < R) :

$$dH_{ri} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p(2k+1)-1} \left[1 + \left(\frac{R}{R_s}\right)^{2p(2k+1)}\right] \sin p(2k+1)\theta \qquad (2\text{-}28)$$

$$dH_{ti} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^{p(2k+1)-1} \left[1 + \left(\frac{R}{R_s}\right)^{2p(2k+1)}\right] \cos p(2k+1)\theta \qquad (2\text{-}29)$$

- à l'extérieur de la nappe (R < r < R_s) :

$$dH_{re} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^{p(2k+1)+1} \left[1 + \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2p(2k+1)}\right] \sin p(2k+1)\theta \qquad (2\text{-}30)$$

$$dH_{te} = +\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{p(2k+1)+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2p(2k+1)}\right] \cos p(2k+1)\theta \qquad (2\text{-}31)$$

Nous allons utiliser ces résultats pour calculer les composantes du champ magnétique produit par des répartitions multipolaires épaisses de formes variées dont la figure (2-6) donne un exemple.

La densité $j(A.m^{-2})$ de courant dans chacun des pôles étant constante, il vient immédiatement

$$J_m = j\, dR \qquad (2\text{-}32)$$

soit pour p donné, l'équation (2-26) s'écrit

$$a_{2k+1} = \frac{4j}{(2k+1)\pi} \sin\left[(2k+1)\frac{\theta_e(R)}{2}\right] dR \qquad (2\text{-}33)$$

On obtient donc pour le multipôle épais

- pour $r < R_i$

$$H\left(\frac{r}{t}\right)_i(r,\theta) = \int_{R=R_i}^{R=R_e} dH\left(\frac{r}{t}\right)_i(r,\theta,R)$$

- pour $r > R_e$

$$H\left(\frac{r}{t}\right)_e(r,\theta) = \int_{R=R_i}^{R=R_e} dH\left(\frac{r}{t}\right)_e(r,\theta,R)$$

et enfin

- pour $R_i < r < R_e$

$$H\left(\frac{r}{t}\right)_b(r,\theta) = \int_{R=R_i}^{R=r} dH\left(\frac{r}{t}\right)_e(r,\theta,R) + \int_{R=r}^{R_e} dH\left(\frac{r}{t}\right)_i(r,\theta,R)$$

(2-34)

Exemple de répartition quadrupôlaire épaisse (p=2)
définissant une loi de variation particulière $\theta_b = f(R)$

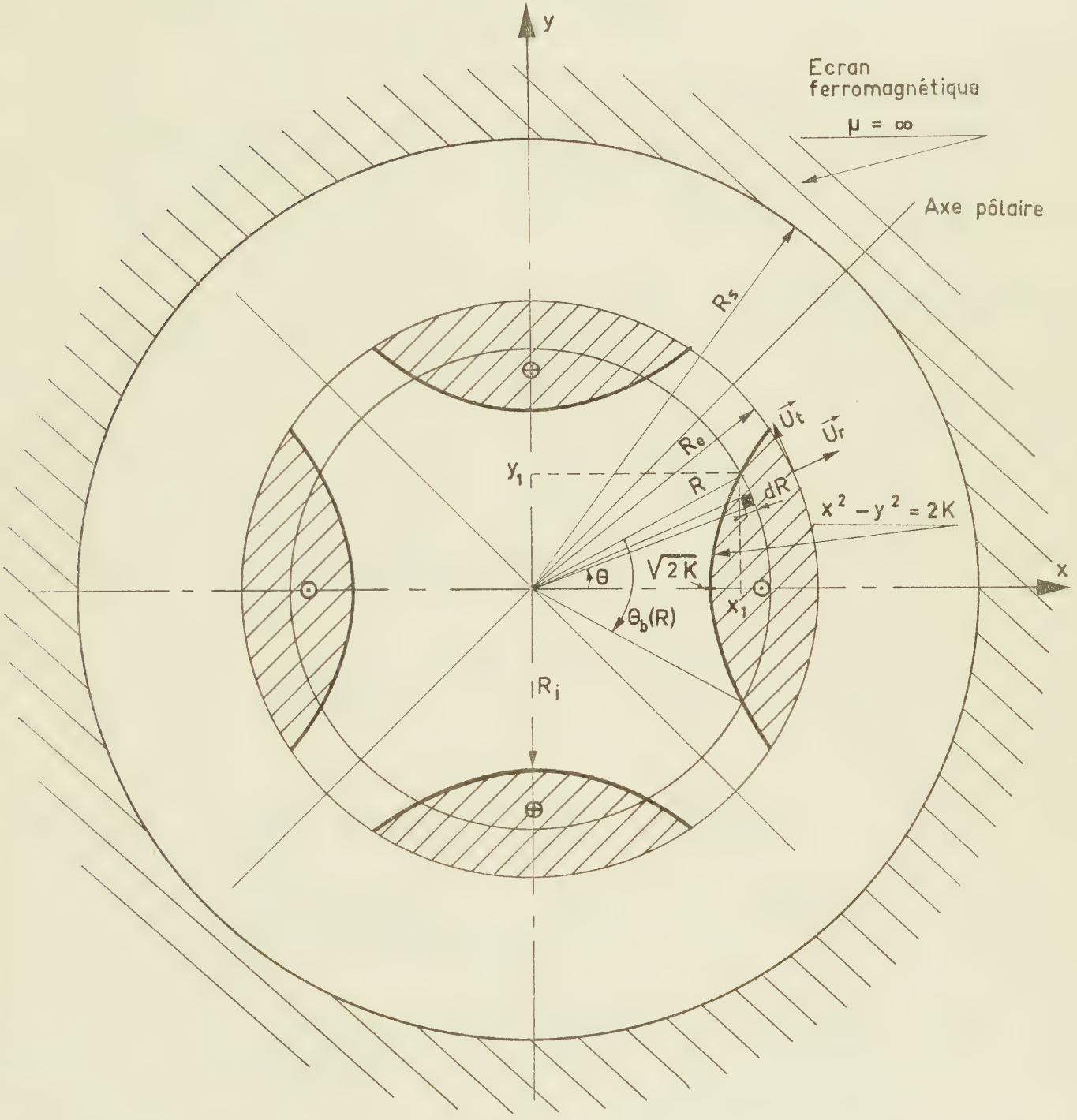


Fig (2-6) Quadrupôle à répartition hyperbolique

2.2. CALCUL D'UN QUADRUPOLE A REPARTITION SECTORIELLE EPAISSE

2.2.1. Calcul du champ magnétique

Nous supposons avoir les conducteurs supraconducteurs répartis suivant quatre secteurs d'angle d'ouverture θ_b et d'épaisseur $R_e - R_i$ (cf. fig. 2-7).

Pour obtenir des valeurs de champ magnétique produit par ce quadrupôle, nous intégrons les équations (2-32) après avoir remplacé $dH\left(\frac{r}{t}\right)_i$ ou $dH\left(\frac{r}{t}\right)_e$ par leurs valeurs données par les expressions (2-28) à (2-31) dans lesquelles on a fait $p = 2$ et remplacé a_{2k+1} de (3-33).

Il vient, tous calculs faits, pour expressions du champ magnétique créé par ce quadrupôle :

- à l'intérieur du quadrupôle $r < R_i$

$$H_{ri} = -\frac{2j}{\pi}\left\{\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[-\lg X + \frac{Z^4}{4}\left(1-X^4\right)\right]\sin 2\theta \right.\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{2(2k+1)\left[1+(2k+1)\right]}\; r\left(\frac{r}{Re}\right)^{2(2k+1)-2}\left\{1-X^{2-2(2k+1)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-(2k+1)}{1+(2k+1)}\,(Z)^{4(2k+1)}\left[1-X^{2+2(2k+1)}\right]\right\}\sin 2(2k+1)\theta\right\}\quad (2\text{-}35)$$

$$H_{ti} = -\frac{2j}{\pi}\left\{\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[-\lg X + \frac{Z^4}{4}\left(1-X^4\right)\right]\cos 2\theta \right.\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{2(2k+1)\left[1+(2k+1)\right]}\; r\left(\frac{r}{Re}\right)^{2(2k+1)-2}\left\{1-X^{2-2(2k+1)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-(2k+1)}{1+(2k+1)}\,(Z)^{4(2k+1)}\left[1-X^{2+2(2k+1)}\right]\right\}\cos 2(2k+1)\theta\right\}\quad (2\text{-}36)$$

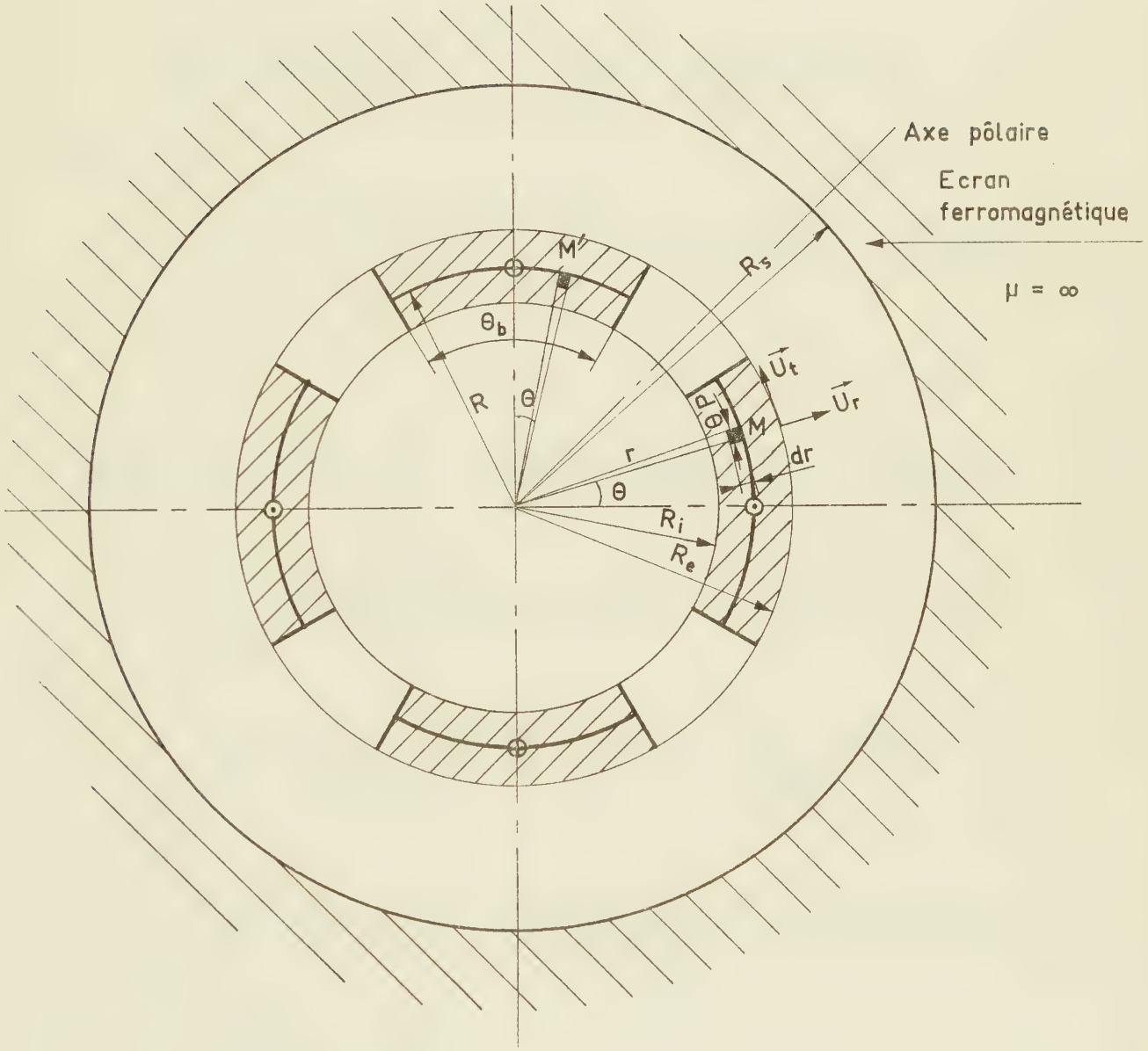


Fig (2 – 7) Quadrupôle à répartition sectorielle épaisse

- au niveau du bobinage $R_i < r < R_e$

$$H_{rb} = -\frac{j}{2\pi}\left\{\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[1-\left(\frac{R_i}{r}\right)^4+4\,Lg\,\frac{Re}{r}+Z^4(1-X^4)\right]\sin 2\theta\right.\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{(2k+1)\left[1-(2k+1)^2\right]}\; r\left\{-4(2k+1)-\left[2-2(2k+1)\right]\left(\frac{R_i}{r}\right)^{2(2k+1)+2}\right.$$

$$+\left[2+2(2k+1)\right]\left(\frac{r}{Re}\right)^{2(2k+1)-2}+\left[2-2(2k+1)\right]\left(\frac{r}{Rs}\right)^{2(2k+1)-2}$$

$$\left.\left.Z^{2(2k+1)+2}\left[1-X^{2(2k+1)+2}\right]\right\}\sin 2(2k+1)\theta\right\}\right\} \qquad (2\text{-}37)$$

$$H_{tb} = -\frac{j}{2\pi}\left\{\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[-1+\left(\frac{R_i}{r}\right)^4+4\,Lg\,\frac{Re}{r}+Z^4(1-X^4)\right]\cos 2\theta\right.\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{(2k+1)\left[1-(2k+1)^2\right]}\; r\left\{-4+\left[2-2(2k+1)\right]\left(\frac{R_i}{r}\right)^{2(2k+1)+2}\right.$$

$$+\left[2+2(2k+1)\right]\left(\frac{r}{Re}\right)^{2(2k+1)-2}+\left[2-2(2k+1)\right]\left(\frac{r}{Rs}\right)^{2(2k+1)-2}$$

$$\left.\left.Z^{2(2k+1)+2}\left[1-X^{2(2k+1)+2}\right]\right\}\cos 2(2k+1)\theta\right\}\right\} \qquad (2\text{-}38)$$

- à l'extérieur du quadrupôle $R_e < r < R_s$

$$Hre = -\frac{j}{2\pi}\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[Z^4+\left(\frac{Re}{r}\right)^4\right](1-X^4)\sin 2\theta \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{(2k+1)\left[1+(2k+1)\right]}\; r\left(\frac{Re}{r}\right)^{2(2k+1)+2}\left[1-X^{2(2k+1)+2}\right]$$

$$\left.\left[1+\left(\frac{r}{Rs}\right)^{4(2k+1)}\right]\sin 2(2k+1)\theta\right\} \qquad (2\text{-}39)$$

$$Hte = +\frac{j}{2\pi}\left\{\sin\frac{\theta_e}{2}\; r\left[Z^4+\left(\frac{Re}{r}\right)^4\right](1-X^4)\cos 2\theta \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{(2k+1)\left[1+(2k+1)\right]}\; r\left(\frac{Re}{r}\right)^{2(2k+1)+2}\left[1-X^{2(2k+1)+2}\right]$$

$$\left.\left[1-\left(\frac{r}{Rs}\right)^{4(2k+1)}\right]\cos 2(2k+1)\theta\right\} \qquad (2\text{-}40)$$

expressions dans lesquelles :

$$X = \frac{Ri}{Re}$$

$$Z = \frac{Re}{Rs}$$

2.2.2. Calcul de l'inductance propre

La self L d'un circuit parcouru par un courant I ne peut être correctement définie qu'à partir de l'énergie magnétique W_m propre au circuit par l'expression :

$$L = \frac{2\,Wm}{I^2} \qquad (2\text{-}41)$$

avec

$$Wm = \frac{1}{2}\int_{\text{espace}} \vec{H}\cdot\vec{B}\; d\mathcal{V}$$

Dans le cas de notre quadrupôle, le calcul de W_m est compliqué, ainsi allons-nous utiliser la méthode citée en [21].

Considérons le quadrupôle de longueur ℓ réalisé à l'aide de N spires par pôle. Chaque spire est constituée d'un conducteur aller situé en M(r, θ) et d'un conducteur retour en M'(r, $\frac{\pi}{2} - \theta$) (Fig. 2-7). La section de chaque conducteur est supposée constante et toutes les spires sont parcourues en série par le même courant I. Il vient :

$$NI = j\,S = j\,\frac{\theta_b}{4}\left(R_e^2 - R_i^2\right) \qquad (2\text{-}42)$$

Un circuit élémentaire de section

$$dS = r\,dr\,d\theta$$

centré en (r, θ) et $(r, \frac{\pi}{2} - \theta)$ correspond donc à un nombre de spires

$$dn = \frac{N}{S}\,dS \qquad (2\text{-}43)$$

Le flux qu'il encercle a donc pour expression :

$$d\psi = \frac{N}{S}\,dS \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta} \mu_0\, H_{rb}(r,\theta)\, \ell \cdot r \cdot d\theta \qquad (2\text{-}44)$$

avec

$$j = NI/S$$

L'expression de la valeur de l'inductance totale est :

$$L = \frac{2}{I} \int_{R_i}^{Re} \int_{-\frac{\theta_b}{2}}^{+\frac{\theta_b}{2}} d\psi\; r\,dr\,d\theta \qquad (2\text{-}45)$$

Il vient tous calculs faits :

$$L = \frac{128\,\mu_0\,\ell\,N^2}{\pi\,\theta_e^2\,(1-X^2)^2}\left\{\sin^2\frac{\theta_e}{2}\left[X^4 Lg\,X + \frac{1-X^4}{4} + \frac{Z^4}{8}\left(1-X^2\right)^2\right]\right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(2k+1)\frac{\theta_e}{2}}{(2k+1)^3\left[4(2k+1)^2-4\right]}\left\{\left[(2k+1)2-2\right] + 4X^{2(2k+1)+2} - \left[2(2k+1)+2\right]X^4\right.$$

$$\left.\left. + 2\,\frac{(2k+1)-1}{(2k+1)+1}\left[1 - X^{2(2k+1)+2}\right]^2 Z^{4(2k+1)}\right\}\right\} \qquad (2\text{-}46)$$

2.2.3. Calcul des efforts électromagnétiques

Les efforts électromagnétiques s'obtiennent immédiatement à partir de l'expression

$$f = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{H} = f_r \vec{u_r} + f_t \vec{u_t} \qquad (2\text{-}47)$$

de la densité volumique d'efforts de Laplace avec ici

$$\vec{j} = j \vec{u_3} \qquad (j = \text{constante})$$

Dans le cas particulier où $\theta_b = \frac{\pi}{3}$ les harmoniques 3n (n entier $\forall$) disparaissent, on a une bonne approximation des efforts en ne retenant que le fondamental du champ magnétique créé par le quadrupôle. Il vient dans ce cas, tous calculs faits, pour un demi-pôle et par unité de longueur :

$$F_x = \frac{\sqrt{3}}{36\pi} \mu_o j^2 R_e^3 \left[1 - 3X^4 + 2X^3 (1 + 3 Lg\, X) \right.$$

$$\left. + \frac{3Z^4}{2} (1 - X^4)(1 - X^3) \right] \qquad (2\text{-}48)$$

$$F_y = \frac{\sqrt{3}}{12\pi} \mu_o j^2 R_e^3 \left[\frac{2}{3} X^3 (4 - \sqrt{3}) - \frac{1}{3} (3X^4 + 5 - 2\sqrt{3}) \right.$$

$$\left. + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) X^3 Lg\, X + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) Z^4 (1 - X^4)(1 - X^3) \right] (2\text{-}49)$$

rappelons que :

$$X = \frac{Ri}{Re} \quad , \quad Z = \frac{Re}{Rs}$$

2.3. CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE PRODUIT PAR UN QUADRUPOLE A REPARTITION HYPERBOLIQUE POSSEDANT UN ECRAN FERROMAGNETIQUE

La figure (2-6) présente une section droite d'un quadrupôle à répartition hyperbolique. Les conducteurs supraconducteurs sont répartis entre la surface cylindrique extérieure de rayon R_e, et la surface intérieure dont la trace sur le plan xOy est l'hyperbole.

$$x^2 - y^2 = 2K \qquad (2-50)$$

Nous supposons toujours la présence d'un écran ferromagnétique de rayon R_s autour de l'induit. Nous considérons cette répartition de courant constituée de plusieurs couches minces à répartition sectorielle mince (paragraphe 2.1.2), d'angle θ_b variable avec le rayon R de la couche considérée.

Pour calculer le champ magnétique produit par cette répartition, il suffit de remplacer dans les équations (2-26), (2-28) à (2-31) $\frac{\theta_e}{2} = \theta_b$ par sa valeur

$$\frac{\theta_e}{2} = 2 \arcsin \frac{y}{R} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{K}{R^2}} \qquad (2-51)$$

puis intégrer les équations (2-34).

Le calcul des intégrales donnant tous les harmoniques du champ magnétique, étant fastidieux, nous ne donnerons ici que l'expression du fondamental ($k = 0$) plus simple à calculer du fait que

$$\sin (2k+1) \frac{\theta_e}{2}$$

prend pour $k = 0$ l'expression

$$\sin \frac{\theta_e}{2} = \sqrt{1 - 4\left(\frac{K}{R^2}\right)^2} \qquad (2-52)$$

les composantes du fondamental ont alors pour expressions :

$$(H_{ri})_{k=o} = -\frac{2j}{\pi} r \sin 2\theta \int_{\sqrt{2K}}^{Re} \frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{R}{R_S}\right)^4\right]\sqrt{1-4\left(\frac{K}{R^2}\right)^2}\ dR$$

$$(H_{rb})_{k=o} = -\frac{2j}{\pi} \sin 2\theta \left\{ \int_{\sqrt{2K}}^{r} \frac{1}{r^3}\left[1+\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right] R\sqrt{R^4-4K^2}\ dR \right.$$

$$\left. + \int_{r}^{Re} \frac{r}{R}\sqrt{1-4\left(\frac{K}{R^2}\right)^2}\left[1+\left(\frac{R}{R_S}\right)^4\right] dR \right\}$$

$$(H_{re})_{k=o} = -\frac{2j}{\pi} \sin 2\theta\ \frac{1}{r^3}\left[1+\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right] \int_{\sqrt{2K}}^{Re} R\sqrt{R^4-4K^2}\ dR$$

en mettant : $Q^2 = \sqrt{R_e^4 - 4K^2}$

Tous calculs faits, il vient :

- à l'intérieur du quadrupôle $r < \sqrt{2K}$

$$(H_{ri})_{k=o} = -\frac{j}{\pi} r\left[\left(\frac{Q}{R_e}\right)^2\left(\frac{Z^4}{2}-1\right) + \left(1-2\frac{Z^4K^2}{R_e^4}\right) Lg\ \frac{R_e^2+Q^2}{2K}\right] \sin 2\theta \quad (2\text{-}53)$$

$$(H_{ti})_{k=o} = -\frac{j}{\pi} r\left[\left(\frac{Q}{R_e}\right)^2\left(\frac{Z^4}{2}-1\right) + \left(1-2\frac{Z^4K^2}{R_e^4}\right) Lg\ \frac{R_e^2+Q^2}{2K}\right] \cos 2\theta \quad (2\text{-}54)$$

- au niveau du bobinage $\sqrt{2K} < r < R_e$

$$(H_{rb})_{k=o} = -\frac{j}{2\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\left[1+\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right]\left[r^2\sqrt{r^4-4K^2} + 4K^2 Lg\ \frac{2K}{r^2+\sqrt{r^4-4K^2}}\right]\right.$$

$$+ r\left[2\left(\frac{Q}{R_e}\right)^2\left(\frac{Z^4}{2}-1\right) + \frac{\sqrt{r^4-4K^2}}{r^2}\left(2-\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right)\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(1-\frac{2K^2Z^4}{R_e^4}\right) Lg\ \frac{R_e^2+Q^2}{r^2+\sqrt{r^4-4K^2}}\right]\right\} \sin 2\theta \qquad (2\text{-}55)$$

$$(H_{tb})_{k=o} = +\frac{j}{2\pi}\left\{\frac{1}{r^3}\left[1-\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right]\left[r^2\sqrt{r^4-4K^2}+4K^2 Lg\frac{2K}{r^2+\sqrt{r^4-4K^2}}\right]\right.$$

$$-r\left[2\left(\frac{Q}{Re}\right)^2\left(\frac{Z^4}{2}-1\right)+2\left(1-2\frac{K^2Z^4}{R_e^4}\right)Lg\frac{Re^2+Q^2}{r^2+\sqrt{r^4-4K^2}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{r^4-4K^2}}{r^2}\left(2-\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right)\right]\right\}\cos 2\theta \qquad (2\text{-}56)$$

- à l'extérieur du quadrupôle R_e r R_s

$$(H_{re})_{k=o} = -\frac{j}{2\pi}\frac{1}{r^3}\left[1+\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right]\left[Re^2Q^2+4K^2 Lg\frac{2K}{Re^2+Q^2}\right]\sin 2\theta \qquad (2\text{-}57)$$

$$(H_{te})_{k=o} = +\frac{j}{2\pi}\frac{1}{r^3}\left[1-\left(\frac{r}{R_S}\right)^4\right]\left[Re^2Q^2+4K^2 Lg\frac{2K}{Re^2+Q^2}\right]\cos 2\theta \qquad (2\text{-}58)$$

2.4. CALCUL DU CHAMP MAGNETIQUE PRODUIT PAR UN QUADRUPOLE A REPARTITION SINUSOIDALE EPAISSE POSSEDANT UN ECRAN FERROMAGNETIQUE

La figure (2-8) montre une section droite d'un quadrupôle à répartition sinusoïdale épaisse. Les conducteurs supraconducteurs sont répartis entre la surface cylindrique extérieure de rayon R_e et une surface intérieure dont la trace sur le plan de section droite décrit la courbe polaire :

$$\rho = R_e - a\cos 2\theta \qquad (2\text{-}59)$$

Nous considérons là encore, la présence d'un écran ferromagnétique de rayon R_s autour de l'induit de la machine, et cette répartition de courant est constituée de plusieurs couches minces à répartition sectorielle (paragraphe 2.1.2) d'angle θ_b variable, en fonction du rayon de la couche considérée.

Pour une couche mince de conducteurs de rayon R et d'épaisseur dR, on a

$$R = R_e - a\cos 2\theta$$

soit

$$\sin \theta_b = \sin \frac{\theta_e}{2} = \sqrt{\frac{a - Re + R}{2a}} \qquad (2\text{-}60)$$

Le calcul se déroule alors de façon identique au paragraphe 2.3. Nous donnons ci-dessous l'expression du terme fondamental des composantes quadrupolaires du champ magnétique :

- à l'intérieur du quadrupôle $r < (R_e - a)$

$$(H_{ri})_{k=0} = -\frac{4j}{\pi\sqrt{2}}\, r \left\{ \left[1 + \frac{a - Re}{\sqrt{a(Re-a)}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a}{Re-a}} \right] + \frac{a}{315\, R_s^4} \left[105\, Re^3 - 126\, Re^2 a + 72\, a^2 Re - 16 a^3 \right] \right\} \sin 2\theta \qquad (2\text{-}61)$$

$$(H_{ti})_{k=0} = -\frac{4j}{\pi\sqrt{2}}\, r \left\{ \left[1 + \frac{a - Re}{\sqrt{a(Re-a)}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a}{Re-a}} \right] + \frac{a}{315 R_s^4} \left[105\, Re^3 - 126\, a Re^2 + 72\, a^2 Re - 16 a^3 \right] \right\} \cos 2\theta \qquad (2\text{-}62)$$

- au niveau du bobinage $(R_e - a) < r < R_e$

$$(H_{rb})_{k=0} = -\frac{4j}{\pi\sqrt{2a}}\, r \left\{ \sqrt{a} + \frac{a-Re}{\sqrt{Re-a}} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{Re-a}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-Re+r}{Re-a}} \right) \right.$$

$$- \sqrt{a-Re+r} + \frac{1}{315\,r}\left[35 - 16\left(\frac{a-Re}{r}\right)^3 - 24\left(\frac{a-Re}{r}\right)^2 + 30\,\frac{a-Re}{r} \right] \sqrt{(a-Re+r)^3}$$

$$\left. + \frac{a}{315\,R_s^4}\left[105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,Re\,a^2 - 16\,a^3 \right] \right\} \sin 2\theta \qquad (2\text{-}63)$$

$$(H_{tb})_{k=0} = -\frac{4j}{\pi\sqrt{2a}}\, r \left\{ \sqrt{a} + \frac{a-Re}{\sqrt{Re-a}} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{Re-a}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-Re+r}{Re-a}} \right) \right.$$

$$- \sqrt{a-Re+r} - \frac{1}{315\,r}\left[35 - 16\left(\frac{a-Re}{r}\right)^3 - 24\left(\frac{a-Re}{r}\right)^2 + 30\,\frac{a-Re}{r} \right] \sqrt{(a-Re+r)^3}$$

$$\left. + \frac{a}{315\,R_s^4}\left[105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,Re\,a^2 - 16\,a^3 \right] \right\} \cos 2\theta \qquad (2\text{-}64)$$

- à l'extérieur du quadrupôle $R_e < r < R_s$

$$(H_{re})_{k=0} = -\frac{4j}{315\sqrt{2}\,\pi}\,\frac{a}{r^3}\left[105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,a^2 Re - 16\,a^3 \right]$$

$$\left[1 + \left(\frac{r}{R_s}\right)^4 \right] \sin 2\theta \qquad (2\text{-}65)$$

$$(H_{te})_{k=0} = +\frac{4j}{315\sqrt{2}\,\pi}\,\frac{a}{r^3}\left[105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,a^2 Re - 16\,a^3 \right]$$

$$\left[1 - \left(\frac{r}{R_s}\right)^4 \right] \cos 2\theta \qquad (2\text{-}66)$$

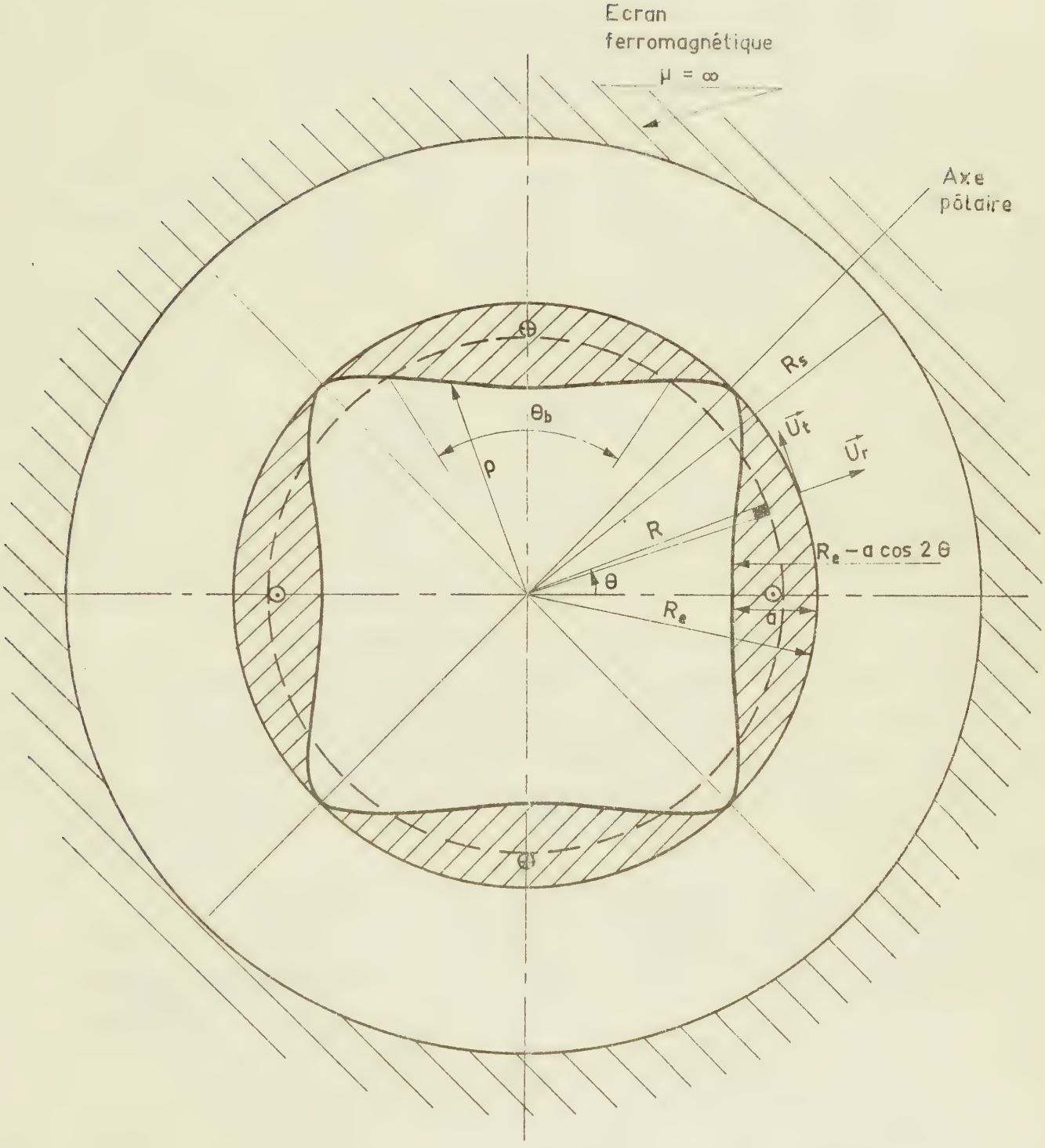


Fig (2-8) Quadrupôle à répartition sinusïdale épaisse

2.5. CALCUL D'UN QUADRUPOLE LONG DANS LE CAS OÙ LA SECTION DROITE DES CONDUCTEURS POSSEDE UNE FORME SYMETRIQUE QUELCONQUE

2.5.1. Introduction

Nous avons étudié dans les paragraphes précédents, trois formes différentes de quadrupôles, en supposant qu'il est techniquement possible de réaliser ces répartitions. Pratiquement, il est très difficile, voir même impossible, de réaliser de telles répartitions, du fait des problèmes technologiques posés, en particulier par la réalisation des têtes de bobines.

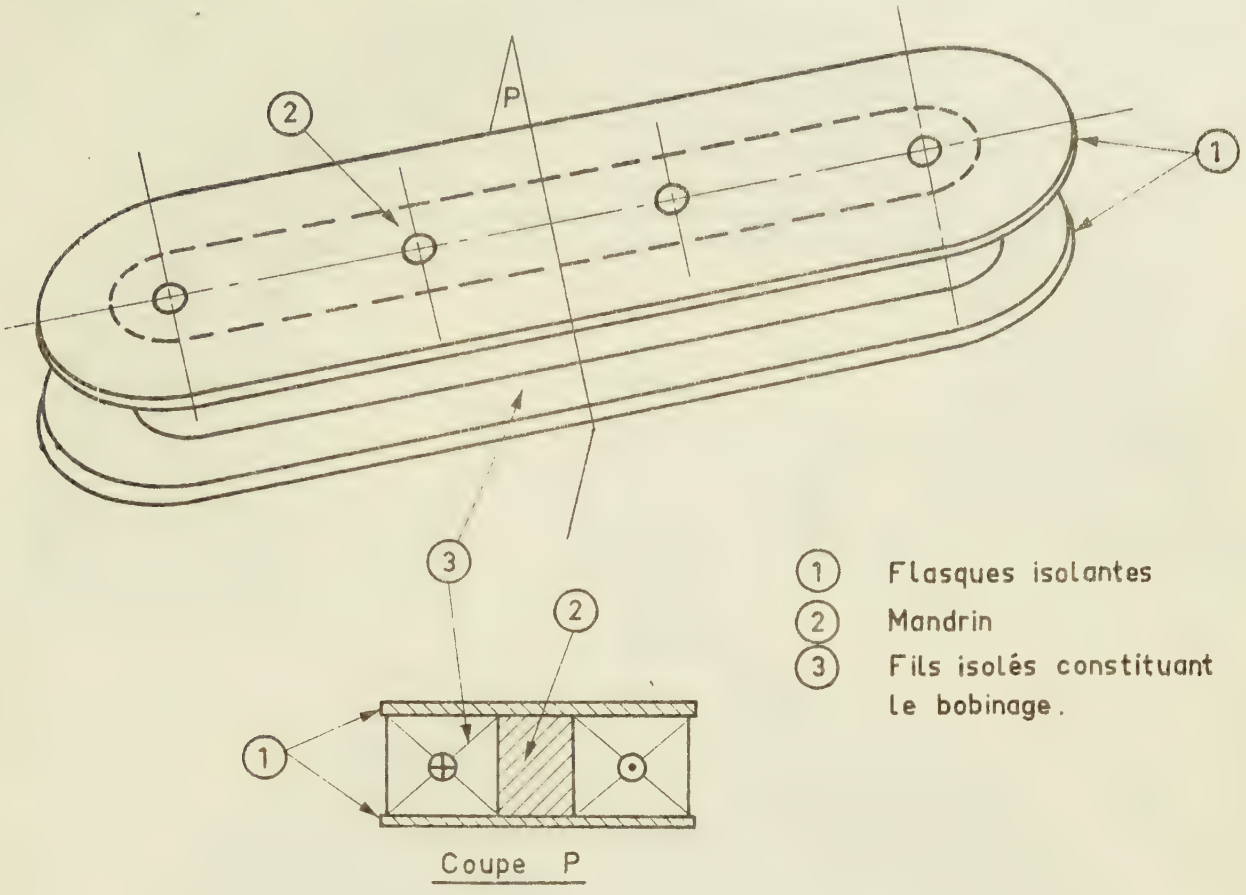
Pour obtenir des bobinages relativement faciles à fabriquer, il faut donner aux têtes de bobines une morphologie simple à réaliser. Nous avons pour cela envisagé la solution suivante :

Chaque pôle est constitué par l'empilement de bobines plates en forme de "boîte de dattes" comme le montre la figure (2-9-a). Ces bobines sont ensuite empilées les une sur les autres pour constituer le quadrupôle, suivant le principe représenté par le schéma de la figure (2-9-b).

La forme des pôles sera obtenue d'autant plus fidélement que le nombre de "boîtes de dattes" réalisées sera plus grand. La largeur de chaque bobine est choisie de manière à présenter un nombre entier de spires par couche, en tenant compte d'un coefficient de foisonnement de bobinage (de l'ordre de 5 % en général).

Les couches de chaque bobine sont isolées l'une par rapport à l'autre avec un matériau permettant l'imprégnation totale du bobinage avec des résines époxy, une fois celui-ci réalisé.

Figure (2- 9- a) Perspective et coupe d'une bobine en forme de "boite de datte "



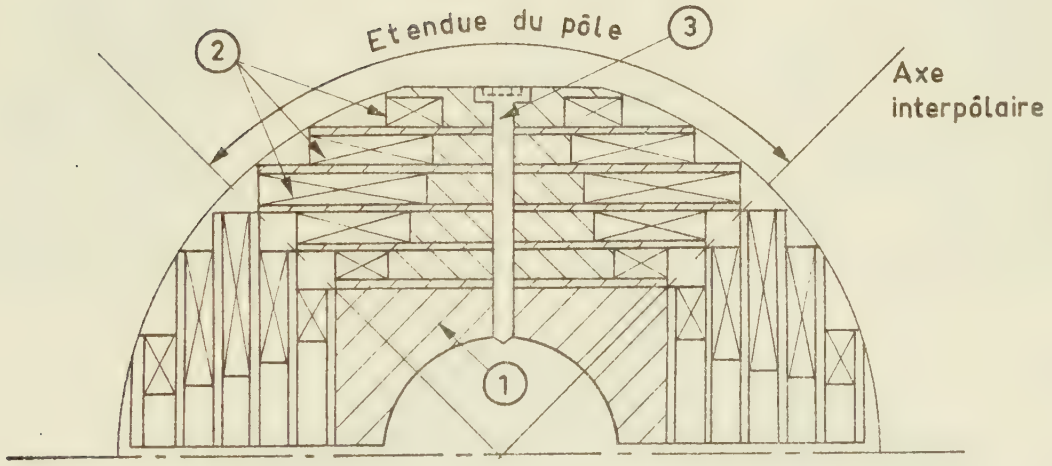


Figure (2 - 9 - b) Coupe droite d'un quadrupole constitué par l'empilement de bobines plates en forme de "boite de datte "

ECHELLE : 0,8

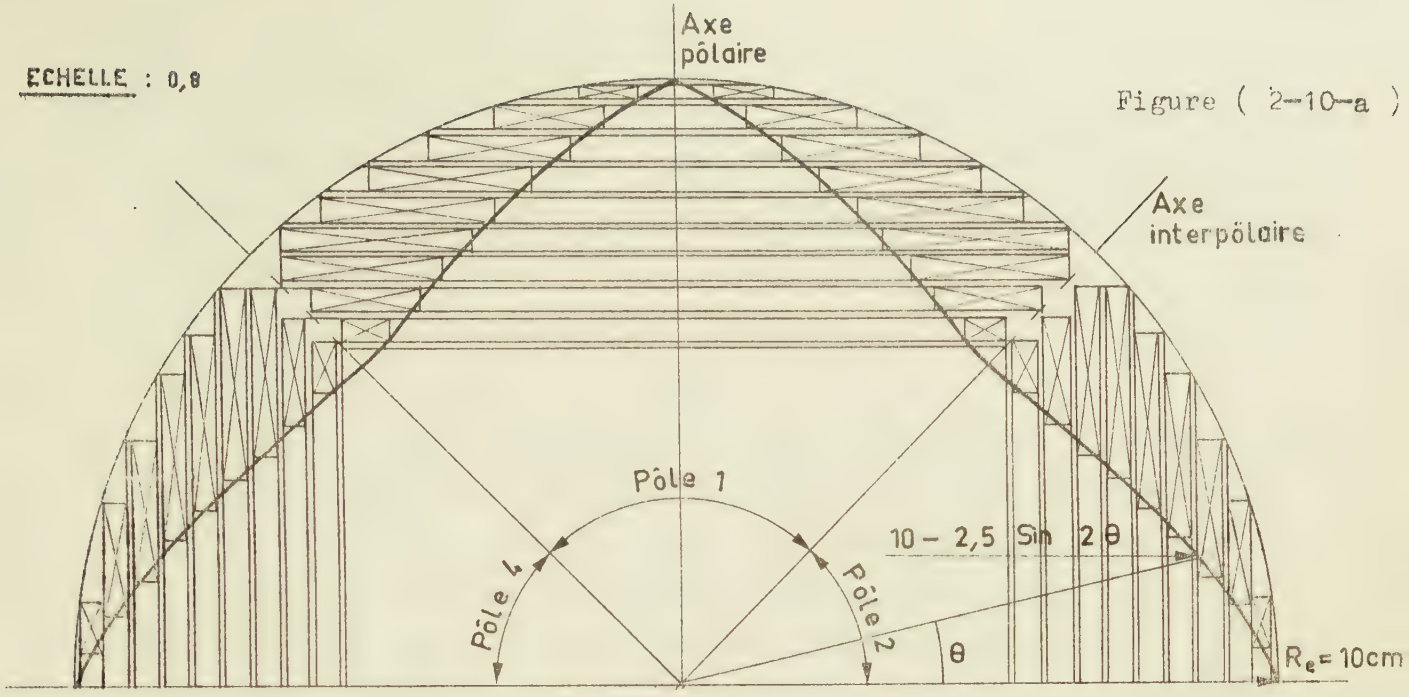


Figure (2–10–a)

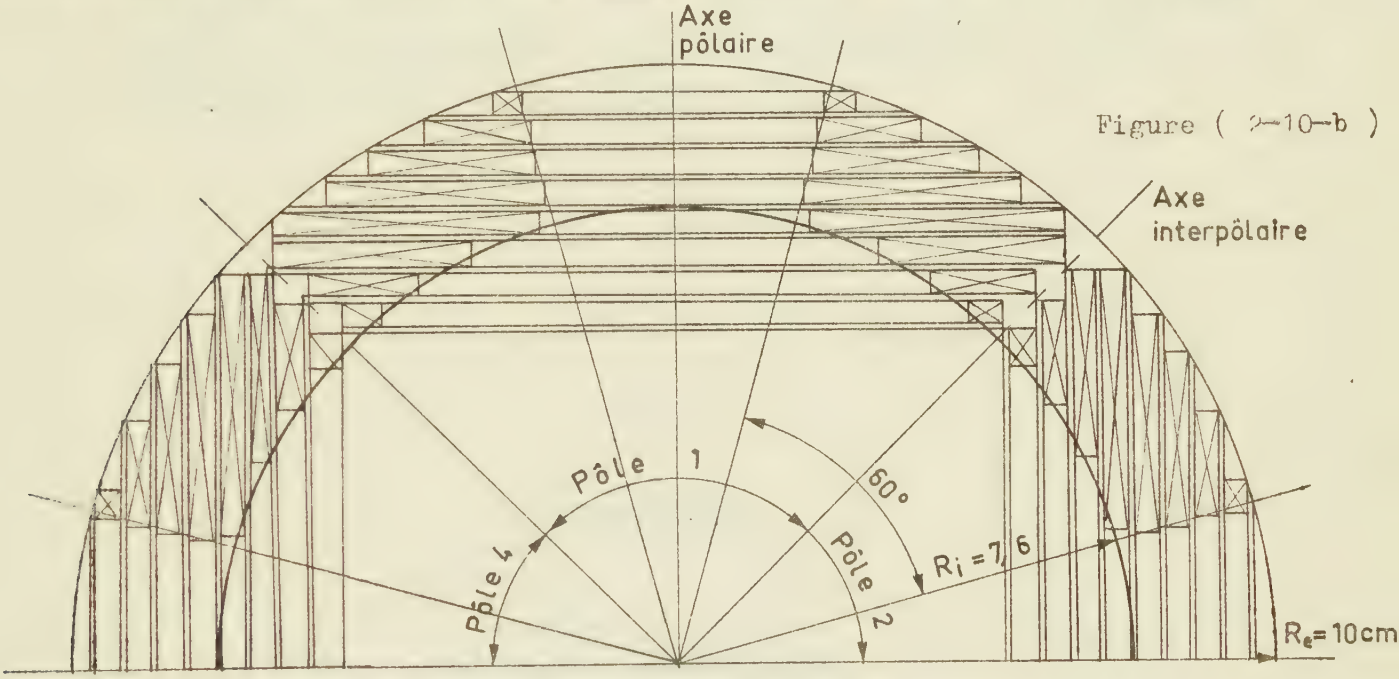


Figure (2–10–b)

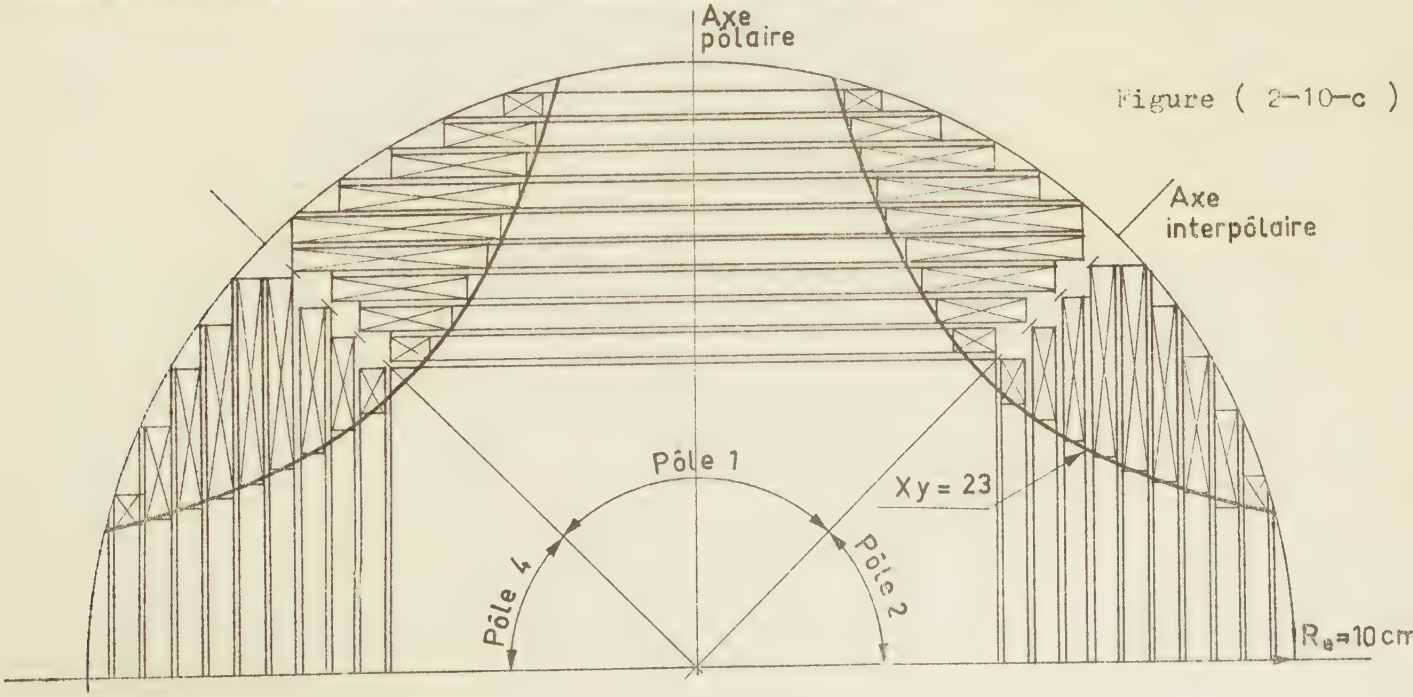


Figure (2–10–c)

La figure (2-10) montre que les trois formes de répartition considérées précédemment, sont réalisées en appliquant la solution précédente.

Remarque :

Il est possible d'obtenir une meilleure répartition des conducteurs sur les axes interpolaires, en utilisant le dispositif de la figure (2-11). Les bobines situées à la même distance radiale et appartenant à des pôles consécutifs sont différentes. Ceci a en effet pour conséquence, d'augmenter la valeur du fondamental de la composante radiale du champ magnétique créé par ce quadrupôle. Or ce terme correspond à la composante utile dans les machines électriques.

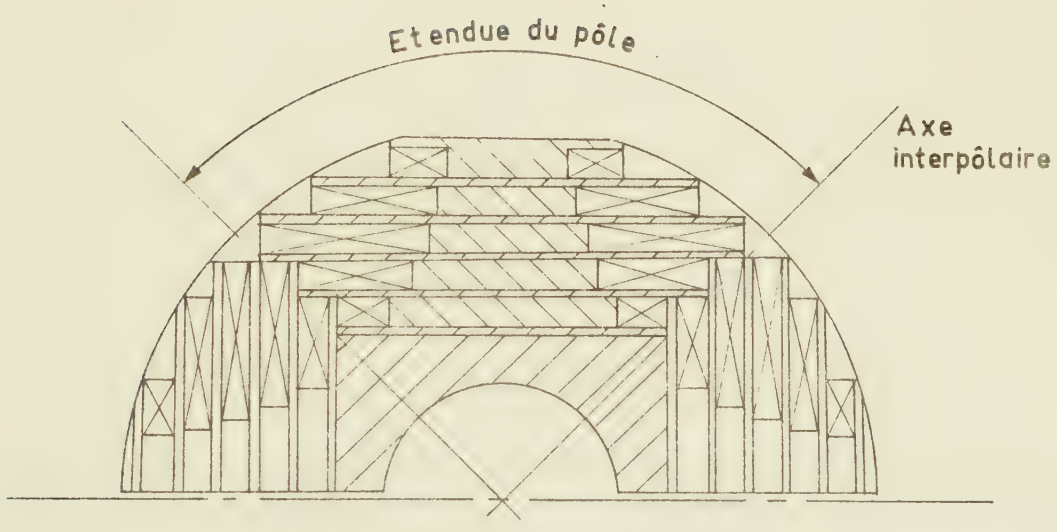
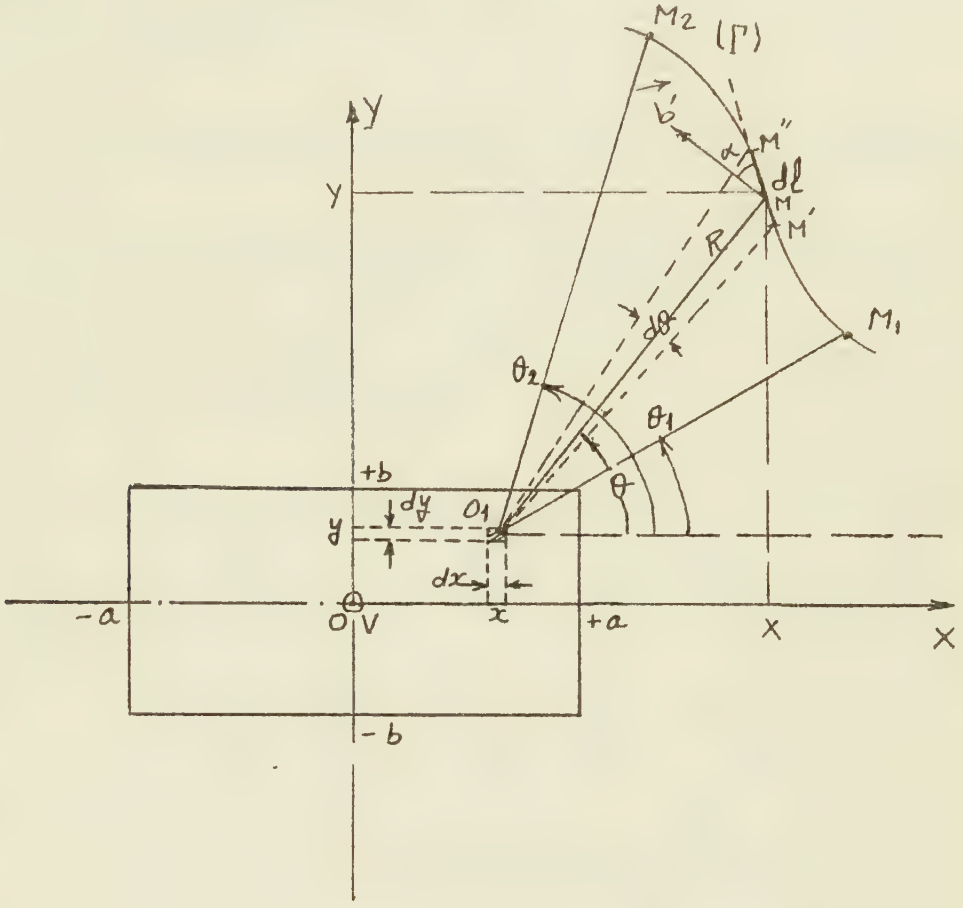


Figure (2 - 11)

2.5.2. Calcul de l'induction magnétique produite par un courant circulant dans un conducteur rectiligne de section rectangulaire

Considérons un conducteur rectangulaire de section 2a x 2b infiniment long suivant OV (fig. 2.12) [OXYV : repère orthonormé]



(Fig. 2-12)

Dans le rectangle circule un courant de densité j uniforme. Un conducteur élémentaire de section dx dy centré en $O_1(x, y)$ produit, dans le système de coordonnées cylindriques $\vec{u}_r$ $\vec{u}_\theta$ $\vec{u}_v$ centré en O_1, une induction magnétique:

$$\overrightarrow{\delta b'} = \mu_0 \frac{j}{2\pi} \frac{dx\,dy}{R} (\vec{u}_v \wedge \vec{u}_r) \qquad (2\text{-}67)$$

On en déduit immédiatement que la composante $\delta P'$ sur OV du potentiel vecteur élémentaire correspondant (défini à une constante près) a pour expression :

$$\delta P' = - \mu_0 \frac{j}{2\pi} \operatorname{Lg} \frac{|R|}{a} dx\,dy \qquad (2\text{-}68)$$

Considérons maintenant une portion de courbe (Γ) dans le plan XY entièrement située à l'extérieur du rectangle. Le champ magnétique en dehors des courants, dérive alors d'un potentiel pseudo-scalaire magnétique δv^*. Posons

$$\delta b' = \operatorname{grad}_{01} \mu_0 \delta v^* \qquad (2\text{-}69)$$

et calculons la circulation de $\overrightarrow{\delta b'}_\theta$ le long de (Γ) de M_1 à M_2. Il vient (cf. Fig. 2.12) :

$$\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\delta b'} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 (\delta v_2^* - \delta v_1^*)$$

$$= \mu_0 \frac{j}{2\pi} dx\,dy \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl}{R} \cos\alpha$$

en remarquant que

$$dl \cdot \cos\alpha = R\, d\theta$$

On obtient

$$\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\delta b'} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \delta v_2^* - \delta v_1^* = \mu_0 \frac{j}{2\pi} dx\,dy\,(\theta_2 - \theta_1)$$

soit :

$$\mu_o \delta v^* = \mu_o \frac{j}{2\pi} dx\, dy\, \theta \qquad (2\text{-}70)$$

avec $\theta = (\vec{ox}, \vec{R})$

En posant

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{X}{a} + i\frac{Y}{a} \; ; \quad z = \frac{x}{a} + i\frac{y}{a} = x' + iy' \\ t &= \frac{R}{a} = \frac{X-x}{a} + i\frac{Y-y}{a} = \eta + i\xi = Z - z \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}71)$$

il est alors possible de définir une fonction δW de la variable complexe t telle que

$$\begin{aligned} \delta W(t) &= -\delta p' + \mu_o i\, \delta v^* \\ &= \mu_o \frac{j}{2\pi} dx\, dy\, (Lg\, t + i\theta) \\ &= \mu_o \frac{j}{2\pi} dx\, dy\, Lg\, (Z - z) \end{aligned} \qquad (2\text{-}72)$$

Cette fonction sera analytique au point $t = t_o$. Si l'on peut trouver un cercle de centre t_o et de rayon non nul tel que, à l'intérieur de ce cercle, les fonctions $\delta p'(\eta, \xi)$ et $\mu_o v^*(\eta, \xi)$ soient univoques et aient des dérivées partielles continues vérifiant identiquement les relations de CAUCHY-RIEMANN :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial(\delta p')}{\partial \eta} &= \mu_o \frac{\partial(\delta v^*)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\delta p')}{\partial \xi} &= \frac{\partial(\mu_o \delta v^*)}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}73)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta W)}{dt} &= -\frac{\partial(\delta p')}{\partial \eta} + i\frac{\partial(\mu_o \delta v^*)}{\partial \xi} \\ &= a\,\delta b'_y + i\, a\, \delta b'_x \end{aligned} \qquad (2\text{-}74)$$

de $\overrightarrow{rot}_0\, \delta \vec{b}' = 0$ hors du rectangle et de (2.68) et (2.71) on déduit effectivement que

$$-\frac{\partial(\delta p')}{\partial \eta} = \mu_0 \frac{\partial(\delta v^*)}{\partial \xi} = a\,\delta b'_y \qquad (2\text{-}75)$$

et

$$\frac{\partial(\delta p')}{\partial \xi} = \frac{\partial(\mu_0 \delta v^*)}{\partial \eta} = a\,\delta b'_x \qquad (2\text{-}76)$$

Il vient alors

$$W(z) = \mu_0 \frac{j}{2\pi} a^2 \int_{-1}^{+1} dx' \int_{-\frac{b}{a}}^{+\frac{b}{a}} Lg(z-\zeta)\, dy' \qquad (2\text{-}77)$$

$(\zeta = x + i\,y)$

En remarquant que $Z_1 = 1 + i\frac{b}{a}$, $Z_2 = -1 + i\frac{b}{a}$, $Z_3 = -1 - i\frac{b}{a}$, $Z_4 = 1 - i\frac{b}{a}$

$$(Z-Z_1)^2 - (Z-Z_2)^2 + (Z-Z_3)^2 - (Z-Z_4)^2 = 8\,i\,\frac{b}{a}$$

On obtient tous calculs faits

$$W(z) = -i\mu_0 \frac{j}{2\pi} a^2 \left[\frac{(Z-Z_1)^2}{2} Lg(Z-Z_1) - \frac{(Z-Z_2)^2}{2} Lg(Z-Z_2) \right.$$
$$+ \frac{(Z-Z_3)^2}{2} Lg(Z-Z_3) - \frac{(Z-Z_4)^2}{2} Lg(Z-Z_4) \qquad (2\text{-}78)$$
$$\left. + 6\,i\,\frac{b}{a} \right]$$

La même intégration effectuée sur les deux membres de l'équation (2.74) conduit à

$$\frac{1}{a}\frac{dW}{dt} = \frac{1}{a}\frac{dW}{dZ} = B'_y + i\,B'_x \qquad (2\text{-}79)$$

B'_Y et B'_X étant les composantes de l'induction due au rectangle au point M. En se ramenant à des grandeurs sans dimension en posant

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\pi}{\mu_0 j a}\ \vec{B'}} \qquad (2\text{-}80)$$

il vient finalement en remarquant que

$$-Z_1 + Z_2 - Z_3 + Z_4 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{B}^* = B_X - i B_Y = -\Big[&(Z-Z_1)\,Lg\,(Z-Z_1)\\ &-(Z-Z_2)\,Lg\,(Z-Z_2)\\ &+(Z-Z_3)\,Lg\,(Z-Z_3)\\ &-(Z-Z_4)\,Lg\,(Z-Z_4)\Big]\end{aligned}} \qquad (2\text{-}81)$$

Remarque importante

a) L'intégration

$$\delta W = \frac{a\,\mu_0 j}{2\pi}(Lg\ t)\ dx'\,dy'$$

sur la section droite du conducteur (2.77) doit être effectuée en prenant la précaution de vérifier que Lg t est holomorphe dans le domaine de variation de t correspondant au domaine d'intégradient de W. En choisissant la détermination principale de $Lg\ t = Lg(\eta + i\,\xi) = r\,e^{i\theta}$, on sait que Lg t est holomorphe dans tout le plan η, ξ sauf sur l'axe réel négatif, y compris l'origine (Fig. 2.13.a)

La détermination principale correspond alors à :

$$-\pi < Arg\ t = \theta \leq \pi \qquad (2\text{-}82)$$

Nous reviendrons par la suite au cas r = 0 correspondant à l'affixe $\bar{M}$ confondu avec Z_1 ou Z_2 ou Z_3 ou Z_4 (cf. Fig. 2.13.b). La figure (2.13.c) donne le domaine de variation de θ dans tout l'espace extérieur au rectangle y compris sur sa surface.

On voit que le domaine du plan x'y' limité par la partie hachurée y compris les lignes Z_2c, Z_3d, Z_2Z_3 et Z_3Z_4 correspond lors de l'intégration de δW à un domaine de variation de t (dans le plan η, ξ) coupant l'axe réel négatif. La fonction Lg t change alors de détermination et une correction devra être apportée au calcul de la partie imaginaire de l'intégrale W. La figure (2.14) illustre le cas particulier d'un point pris dans l'aire hachurée de la figure 2.13.c.

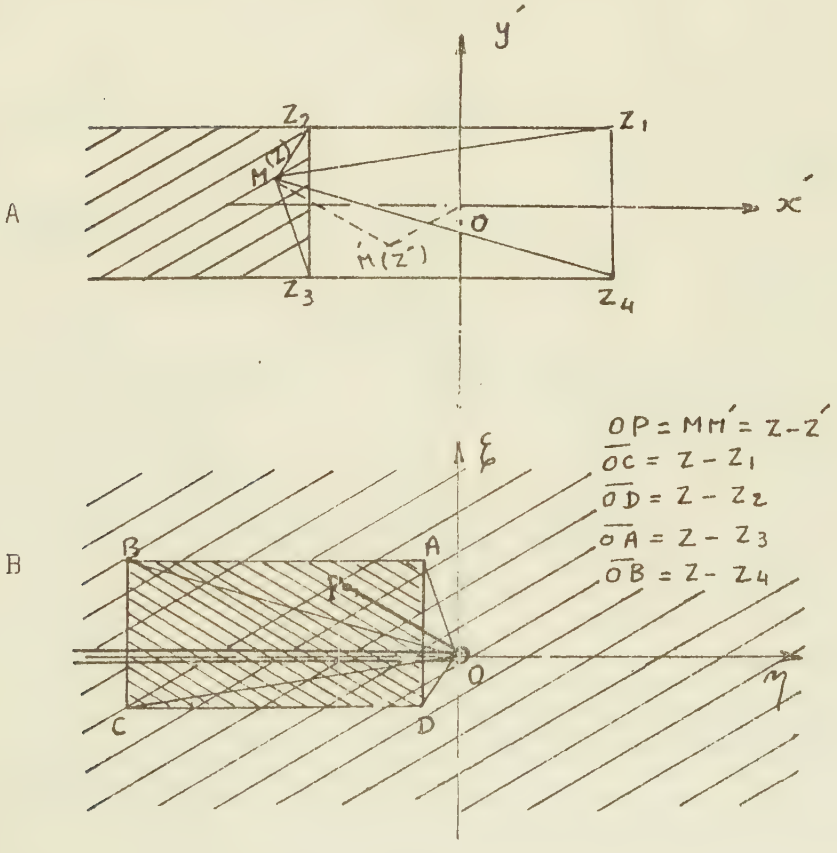


Fig. (2-14)

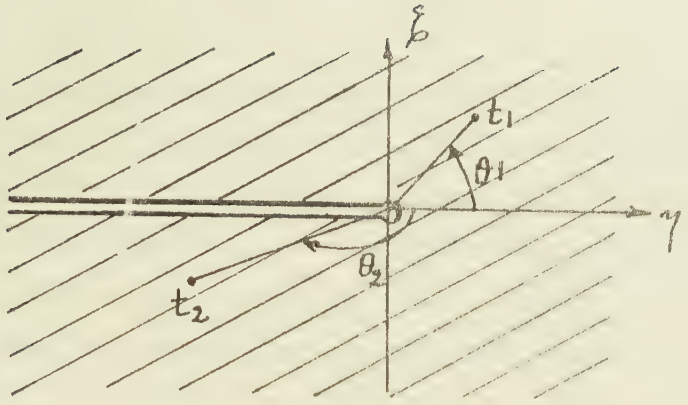


Fig. (2-13-a)

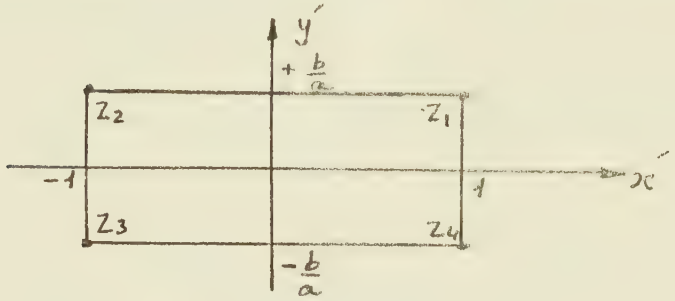


Fig. (2-13-b)

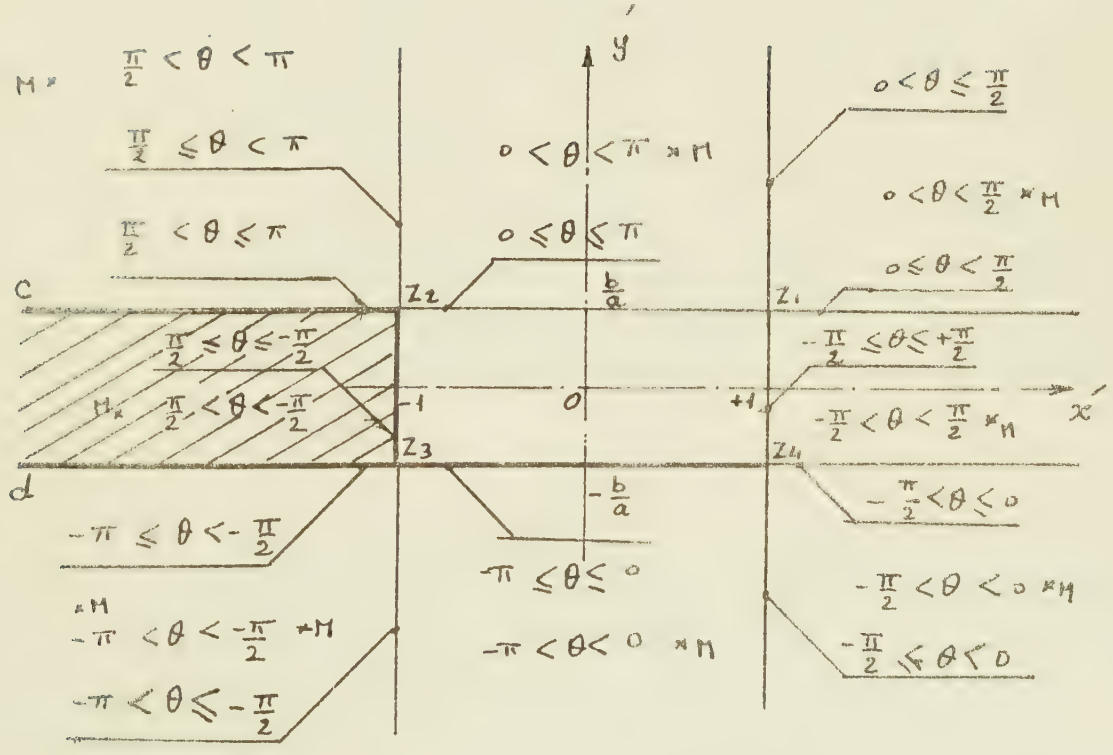


Fig. (2-13-c)

Il est ainsi facile de vérifier que pour un point M' d'affixe Z' pris dans la région hachurée ou sur les lignes Z_2c, Z_3d et Z_2Z_3 de la fig(2-13c) l'évolution de l'argument de $Lg(Z' - Z_q)$ $(q = 1, 2, 3, 4)$ se faisant avec la détermination principale, on obtient :

$$(B_y)_{vrai} = (B_y)_{\substack{\text{calculée à} \\ \text{l'aide de (2-81)}}} - 4\pi \quad (2-83)$$

De même pour un point M' d'affixe Z' situé sur le segment Z_3Z_4 de la fig. (2.13.c) en utilisant toujours la détermination principale de $Lg(Z' - Z_q)$, on a :

$$(B_y)_{vrai} = (B_y)_{\substack{\text{calculée à} \\ \text{l'aide de (2-81)}}} - 2\pi|Z' - Z_4| \quad (2-84)$$

Nous décrirons plus loin comment le calcul de champ magnétique que nous venons de présenter a été appliqué au calcul de l'induction d'un quadrupole épais de section droite quelconque. Le calcul numérique a fait appel à un ordinateur IBM 360 en programmation "FORTRAN". Le choix de l'argument de Lg t se fait alors dans une détermination identique à celle que nous avons retenu (détermination principale $-\pi < \theta \leq +\pi$). Les corrections précisées ci-dessus sont donc directement applicables.

b) L'expression (7) est encore valable pour $Z = Z_q$ $(q = 1, 2, 3, 4)$ car $(Z - Z_q)\, Lg(Z - Z_q) \longrightarrow 0$ pour $Z = Z_q$.

c) On peut enfin montrer que l'expression (2.78) est encore valable pour tout point M d'affixe Z à l'intérieur du rectangle.

2.5.3. Calcul de l'induction magnétique produite par un quadrupôle à bobines symétriques deux à deux, par rapport aux axes interpolaires et calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur ses bobines :

2.5.3.1. Expression analytique de l'induction magnétique :

Nous considérons le cas de bobines symétriques deux à deux par rapport aux axes interpolaires.

Sur la figure (2.15) nous avons représenté quatre bobines identiques appartenant chacune à un pôle déterminé de l'inducteur. La section des conducteurs est rectangulaire et la densité de courant dans les bobines est constante.

Chaque pôle étant constitué par N bobines plates, il y a donc pour le quadrupôle 8N sections rectangulaires de conducteurs à considérer pour pouvoir calculer le champ magnétique total créé en M(X, Y).

Nous désignerons

- par C_{m_q} $(m = 1, 2 \ldots\ldots N)$ $(q = 1, 2, 3, 4)$

chacun des quatre rectangles hachurés de la figure (2.15) appartenant au $m^{ième}$ groupe de bobines plates constituant le quadripôle,

- et par D_{m_r} $(r = I, II, III, IV)$

chacun des quatre autres rectangles non hachurés du groupe m.

Le groupe 1 est le plus proche de O, le groupe m en est le plus éloigné.

Nous voyons que dans l'expression (2.81) donnant $\overline{B}^*$, n'intervient que les différences d'affixes des sommets du rectangle considéré. L'expression de $\overline{B}^*_{m1}$ correspondant à l'induction produite par C_{m_1} est identique à (2.81), à condition de numéroter ses affixes des sommets comme indiqué sur la figure (2.15).

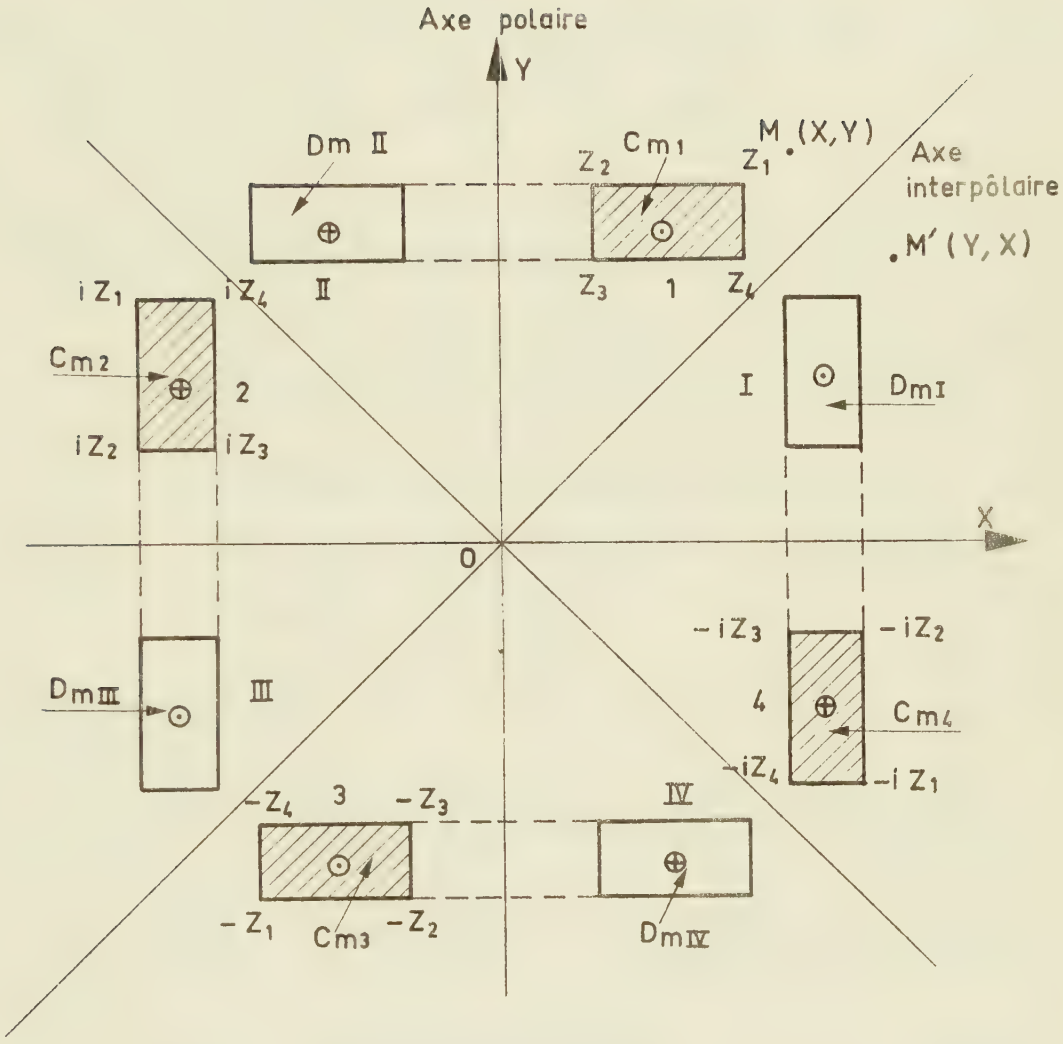

Axe polaire
Y
Dm II
Cm1
Z2
Z1
M (X,Y)
Axe interpôlaire
M' (Y, X)
iZ1
iZ4
II
Z3
1
Z4
Cm2
2
iZ2
iZ3
I
DmI
X
0
-iZ3
-iZ2
DmIII
III
4
Cm4
-iZ4
-iZ1
-Z4
3
-Z3
IV
-Z1
Cm3
-Z2
DmIV

Figure (2-15)

En multipliant par i les affixes de ces sommets, on obtient les affixes des sommets du rectangle C_{m2}. L'expression de $\overline{B}^*_{m2}$ correspondant à l'induction créée en M(X,Y) par C_{m2} est alors obtenue en multipliant dans l'expression (2-81), les affixes Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 par i. De même $\overline{B}^*_{m3}$ l'induction créée en M(X,Y) par C_{m3} est obtenue en multipliant ces sommets par $i^2 = -1$, et $\overline{B}^*_{m4}$ l'induction créée en M(X,Y) par C_{m4} est obtenue en multipliant les affixes par - i.

L'induction magnétique complexe conjuguée produite par le groupe C_m en M(X,Y) a donc pour expression

$$(\overline{B}^*_m)_c(z) = \overline{B}^*_{m1} + \overline{B}^*_{m2} + \overline{B}^*_{m3} + \overline{B}^*_{m4}$$

soit

$$\begin{aligned}(\overline{B}^*_m)_c = \Big[& -(z-z_1)\,Lg\,(z-z_1) + (z-z_2)\,Lg\,(z-z_2) - (z-z_3)\,Lg\,(z-z_3) \\ & + (z-z_4)\,Lg\,(z-z_4) - (z-iz_1)\,Lg\,(z-iz_1) + (z-iz_2)\,Lg\,(z-iz_2) \\ & - (z-iz_3)\,Lg\,(z-iz_3) + (z-iz_4)\,Lg\,(z-iz_4) - (z+z_1)\,Lg\,(z+z_1) \\ & + (z+z_2)\,Lg\,(z+z_2) - (z+z_3)\,Lg\,(z+z_3) + (z+z_4)\,Lg\,(z+z_4) \\ & - (z+iz_1)\,Lg\,(z+iz_1) + (z+iz_2)\,Lg\,(z+iz_2) - (z+iz_3)\,Lg\,(z+iz_3) \\ & + (z+iz_4)\,Lg\,(z+iz_4)\Big]\end{aligned} \qquad (2\text{-}85)$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}(\overline{B}^*_m)_c = \Big[& z_1 Lg\frac{z-z_1}{z+z_1} - z_2 Lg\frac{z-z_2}{z+z_2} + z_3 Lg\frac{z-z_3}{z+z_3} - z_4 Lg\frac{z-z_4}{z+z_4} \\ & + iz_1 Lg\frac{z-iz_1}{z+iz_1} - iz_2 Lg\frac{z-iz_2}{z+iz_2} + iz_3 Lg\frac{z-iz_3}{z+iz_3} - iz_4 Lg\frac{z-iz_4}{z+iz_4} \\ & + z\,Lg\frac{(z^4-z_2^4)(z^4-z_4^4)}{(z^4-z_1^4)(z^4-z_3^4)}\Big]\end{aligned} \qquad (2.86)$$

Désignons par

B_{Xmq}, B_{Ymq} les composantes de l'induction (suivant OX et OY) produite au point M d'affixe Z = X + iY par le $q^{ième}$ (q = 1, 2, 3, 4) rectangle du groupe C_m.

B_{Xmr}, B_{Ymr} les composantes de l'induction produite en M par le $r^{ième}$ (r = I, II, III, IV) rectangle du groupe D_m.

B'_{Xmq}, B'_{Ymq} les composantes de l'induction produite en M' d'affixe $Z' = Y + iX$ par le $q^{ième}$ rectangle du groupe C_m.

$(B'_{Xm})_C$ $(B'_{Ym})_C$ les composantes de l'induction dues en M' au groupe C_m.

$(B_{Xm})_C$, $(B_{Ym})_C$ les composantes de l'induction, dues en M au groupe C_m.

$(B_{Xm})_D$, $(B_{Ym})_D$ les composantes de l'induction dues en M au groupe C_m.

On a donc

$$(B_{Xm})_C = \sum_{q=1}^{4} B_{Xmq} = \mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(Z)\right] \quad (\mathcal{R} : \text{partie réelle de})$$

$$(B_{Ym})_C = \sum_{q=1}^{4} B_{Ymq} = \mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(Z)\right] \quad (\mathcal{J} : \text{partie imaginaire de})$$

$$(B'_{Xm})_C = \sum_{q=1}^{4} B'_{Xmq} = \mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(Z')\right]$$

$$(B'_{Ym})_C = \sum_{q=1}^{4} B'_{Ymq} = -\mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(Z')\right]$$

Nous allons déduire les composantes de l'induction magnétique $(B_{Xm})_D$ et $(B_{Ym})_D$ produites en M(X, Y) par les rectangles du groupe D_m de celles produites en M' par les rectangles du groupe C_m en considérant les symétries du système (Fig.2-15).

On a en effet

$$(B_{Xm})_D = \sum_{r=I}^{IV} B_{Xmr}$$

$$(B_{Ym})_D = \sum_{r=I}^{IV} B_{Ymr}$$

et d'après les propriétés de symétrie du système

$$B'_{Xmq} = -B_{Ymr}$$

$$B'_{Ymq} = -B_{Xmr}$$

soit

$$(B_{Xm})_D = \sum_{r=I}^{IV} B_{xmr} = -\sum_{q=1}^{4} B'_{ymq} = -(B'_{ym})_C$$

et

$$(B_{ym})_D = \sum_{r=I}^{IV} B_{ymr} = -\sum_{q=1}^{4} B'_{xmq} = -(B'_{xm})_C$$

L'induction magnétique $\bar{B}_m = B_{Xm} + iB_{Ym}$ due à l'ensemble des conducteurs du groupe m, au point $Z = X + iY$ a pour valeur

$$B_{xm} = (B_{xm})_C + (B_{xm})_D = (B_{xm})_C - (B'_{ym})_C$$

$$B_{ym} = (B_{ym})_C + (B_{ym})_D = (B_{ym})_C - (B'_{xm})_C$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} B_{xm} &= \mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z)\right] + \mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z')\right] \\ B_{ym} &= -\mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z)\right] - \mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z')\right] \end{aligned}\right\} \quad (2.87)$$

L'induction magnétique totale produite par le quadrupôle au point M(Z) est la somme de l'induction produite par les N groupes C et les N groupes D :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} B_{xm} &= \sum_{m=1}^{N} \left\{\mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z)\right] + \mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z')\right]\right\} \\ \sum_{m=1}^{N} B_{ym} &= \sum_{m=1}^{N} \left\{-\mathcal{J}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z)\right] - \mathcal{R}\left[(\bar{B}^*_m)_C(z')\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad (2.88)$$

2.5.3.2. Calcul des efforts électromagnétiques s'exerçant sur les bobines du quadrupole

Connaissant l'induction magnétique en tout point à l'extérieur des conducteurs rectangulaires ainsi que sur leurs surfaces, nous pouvons calculer les efforts électromagnétiques globaux s'exerçant sur chaque rectangle à l'aide du tenseur des contraintes de Maxwell [23] [24] [Cf Fig. (2.2) p. 17].

Appliquons l'expression (2.5) sur les quatre faces du rectangle de la Fig.(2.16)

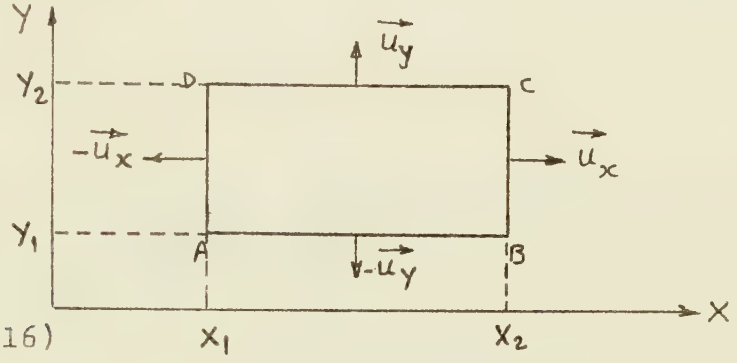


Fig. (2.16)

En appelant B_{x_j} et B_{y_j} les composantes suivant x et y de l'induction magnétique locale (due à l'ensemble des conducteurs constituant le quadrupole) au niveau des faces AB (j = 1), BC (j = 2), CD (j = 3), DA (j = 4) du rectangle, on obtient, tous calculs faits, pour expression de l'effort global par unité de longueur s'exerçant sur le conducteur considéré :

$$\frac{\vec{F}}{\ell} = \frac{1}{\mu_0}\left[\int_{X_1}^{X_2}\left(\frac{B_{x1}^2 - B_{y1}^2}{2}\vec{u}_y - B_{x1}B_{y1}\vec{u}_x - \frac{B_{x3}^2 - B_{y3}^2}{2}\vec{u}_y + B_{x3}B_{y3}\vec{u}_x\right)dx + \int_{Y_1}^{Y_2}\left(\frac{B_{x2}^2 - B_{y2}^2}{2}\vec{u}_x + B_{x2}B_{y2}\vec{u}_y - \frac{B_{x4}^2 - B_{y4}^2}{2}\vec{u}_x - B_{x4}B_{y4}\vec{u}_y\right)dy\right] \quad (2\text{-}89)$$

Remarque : les efforts s'exerçant sur un rectangle pourront être calculés d'une manière approchée à partir de la loi de Laplace en calculant l'induction magnétique au centre de gravité du rectangle considéré, produite par les (8N -1) autres rectangles.

On obtient ainsi par unité de longueur

$$\frac{\vec{dF}}{d\ell} = I\,\vec{u_v} \wedge \vec{B} \qquad (2\text{-}90)$$

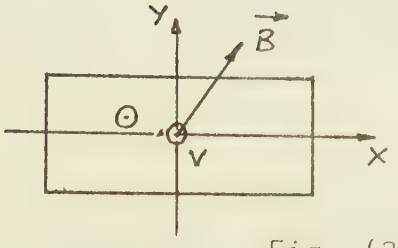


Fig. (2.17)

En effet si le rectangle considéré a une surface suffisamment faible, B ainsi calculé représente une bonne approximation de l'induction extérieure appliquée.

2.5.3.3. Calcul numérique de l'induction magnétique et des efforts électromagnétiques

Pour effectuer ces calculs nous avons eu recours à un ordinateur IBM 360. Le "Listing" de ce programme a été joint au texte à la fin de ce paragraphe.

Nous avons vu dans l'étude analytique, que par raison de symétrie, il suffit de prendre en compte les conducteurs correspondant à un demi-pôle du système.

Le calcul s'effectue pour tout point de l'espace à l'extérieur des conducteurs, et pour les points situés sur les faces des rectangles. Ceux-ci divisent la partie du plan de section droite du quadrupôle traversée par une densité de courant uniforme.

Très sommairement, on procède de la façon suivante :

1°) Calcul de l'induction

- On choisit un point d'affixe $Z = X + iY$ et on lui associe le point $Z' = Y + iX$
- On calcul alors $(\bar{B}^*_m)_c(Z)$ et $(\bar{B}^*_m)_c(Z')$ $1 \leq m \leq N$ données par l'equation (2.85)

- Les deux composantes B_x et B_y de l'induction magnétique totale produite en M sont alors données par les équations (2.88)

2°) Calcul des efforts électromagnétiques. La connaissance de la valeur locale des deux composantes de l'induction sur les faces du rectangle conduit immédiatement, grâce à (2.89), à l'expression des deux composantes de la force de Laplace s'exerçant sur chaque conducteur élémentaire de section rectangulaire constituant le demi-pôle considéré.

2.5.3.4. Exploitation du programme - Exemples

Nous avons appliqué le programme de calcul aux trois inducteurs présentés sur la Fig. 2.10 caractérisés par les dimensions suivantes :

$R_e = 10^{-1}$ m pour les 3 quadrupôles

$a = 2{,}5.10^{-2}$ m pour la répartition sinusoïdale épaisse

$K = 23.10^{-4}$ m^2 pour la répartition hyperbolique

$R_i = 7{,}6.10^{-2}$m rayon intérieur dans la répartition sectorielle épaisse.

De façon à ce que l'on puisse comparer les inductions magnétiques produites par chacun des bobinages au niveau de l'induit, nous avons supposé que ces différents quadrupôles étaient réalisés avec la même quantité de matériau supraconducteur par unité de longueur. Nous appellerons S la section droite d'un demi-pôle identique pour les trois bobinages.

Le calcul du champ magnétique a été effectué en considérant que le matériau supraconducteur utilisé dans les trois cas avait une courbe critique en échantillon court - (variation

de la densité $\dot{J}$ de courant moyenne sur la section du câble au moment de la transition, en fonction de la résultante B de l'induction extérieure appliquée au fil)- du type :

$$\dot{J} = \frac{\alpha}{B + B_o} \qquad (2\text{-}91)$$

Pour le calcul numérique les constantes α et B_o ont été prises égales à :

$$\alpha = 2{,}4.10^9 \ T.A.m^{-2}$$

$$B_o = 1 \ T$$

Le calcul s'effectue de la façon suivante :

1°) On découpe la section droite de chaque répartition en rectangles tracés de façon à ce qu'ils remplissent le mieux possible la surface correspondante.

2°) On calcule alors l'induction totale produite par le quadrupole considéré en tout point de la surface des rectangles.

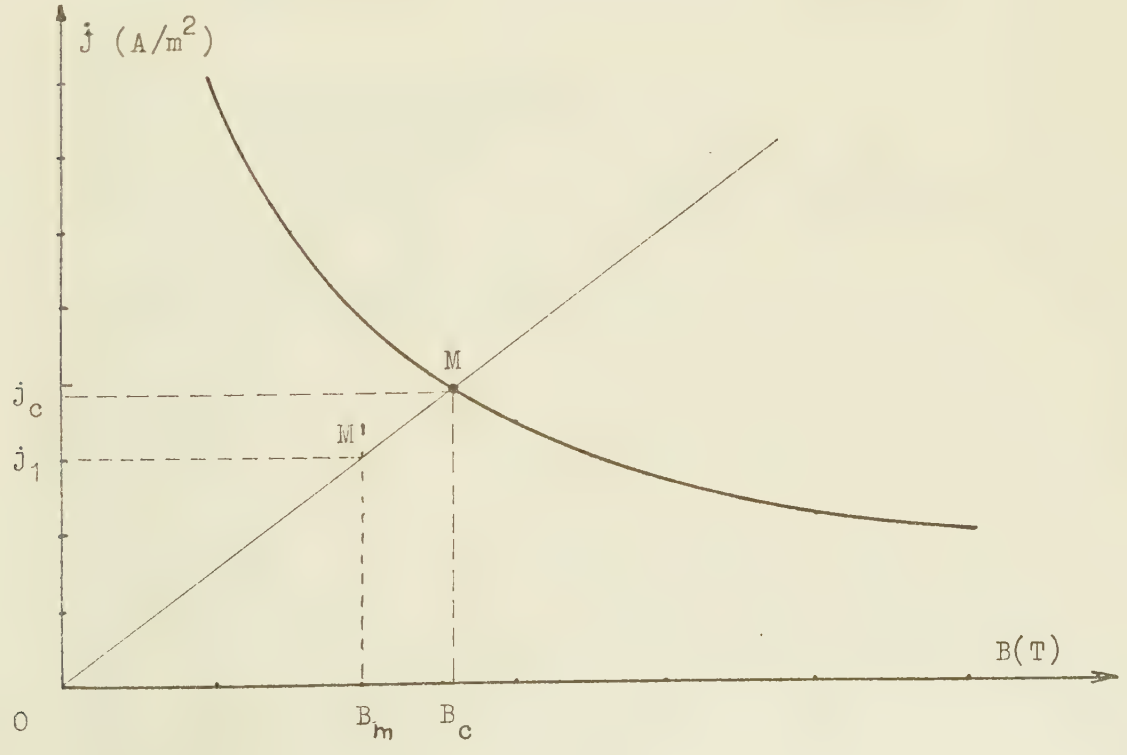
3°) Pour une valeur donnée $\dot{J}_1$ de $\dot{J}$, on obtient ainsi avec une précision suffisante le point de la section droite où règne l'induction maximum B_m -(point "chaud")-. Dans la suite du calcul, nous confondrons B_m avec la valeur de l'induction extérieure appliquée sur le fil situé au point chaud : en effet l'induction propre dûe au fil en ce point (0,2 T environ) est faible devant B_m (plusieurs Tesla). Cette approximation nous permettra d'utiliser directement la courbe en échantillon court du fil supra. (Fig. 2.18). Sur cette

courbe, le point chaud correspond au point $M'(J_1, B_m)$. Une construction simple permet alors (Cf Fig. 2.18) de déterminer les valeurs critiques B_c et J_c au moment de la transition (point M de la courbe). La meilleure utilisation possible du quadrupole ainsi constitué correspondra à un courant i dans le fil supraconducteur de section s légèrement inférieur à la valeur

$$i = J_c \, s$$

Nous avons porté sur les figures (2.19, 2.20 et 2.21) les valeurs critiques de la composante radiale B_{r_c} de l'induction obtenues à l'aide de la méthode décrite précédemment, en fonction de θ pour un rayon donné.

Pour chaque figure, ces valeurs sont comparées aux valeurs du fondamental $(B_{r_c})_S$ produit par la répartition considérée, ce fondamental étant calculé à l'aide de l'étude analytique du § (2.2),(2.3) et (2.4). Nous avons ensuite calculé les efforts s'exerçant sur ces trois distributions de conducteurs. Les résultats sont présentés vectoriellement et sous forme de tableau sur les figures (2.22) (2.23) et (2.24).



```
      C
      CCC   CALCUL DE L'INDUCTION MAG. ET DES EFFORTS ELECTROMAGNETIQUES
      C
      CCC   SOUS PROGRAMME (CALCUL DE LOG COMPLEX)
      C
 1          COMPLEX FUNCTION FUNC(Z)
 2          COMPLEX Z,CMPLX
 3          X=REAL(Z)
 4          Y=AIMAG(Z)
 5          XX=ALOG(CABS(Z))
 6          YY=ATAN2(Y,X)
 7          FUNC=CMPLX(XX,YY)
 8          RETURN
 9          END
      C
      CCC   SOUS  PROGRAMME (L'EQUATION DE L'INDUCTION MAG. CONJUGUEE)
      C

10          COMPLEX FUNCTION BCONJ(Z,Z1,Z2,Z3,Z4,EI)
11          COMPLEX Z,Z1,Z2,Z3,Z4,EI,CMPLX,FUNC
12          EI=CMPLX(0.,1.)
13          BCONJ=0.
14          BCONJ=BCONJ+(-(Z-Z1)*FUNC(Z-Z1)+(Z-Z2)*FUNC(Z-Z2))
15          BCONJ=BCONJ+(-(Z-Z3)*FUNC(Z-Z3)+(Z-Z4)*FUNC(Z-Z4))
16          BCONJ=BCONJ+(-(Z-EI*Z1)*FUNC(Z-EI*Z1)+(Z-EI*Z2)*FUNC(Z-EI*Z2))
17          BCONJ=BCONJ+(-(Z-EI*Z3)*FUNC(Z-EI*Z3)+(Z-EI*Z4)*FUNC(Z-EI*Z4))
18          BCONJ=BCONJ+(-(Z+Z1)*FUNC(Z+Z1)+(Z+Z2)*FUNC(Z+Z2))
19          BCONJ=BCONJ+(-(Z+Z3)*FUNC(Z+Z3)+(Z+Z4)*FUNC(Z+Z4))
20          BCONJ=BCONJ+(-(Z+EI*Z1)*FUNC(Z+EI*Z1)+(Z+EI*Z2)*FUNC(Z+EI*Z2))
21          BCONJ=BCONJ+(-(Z+EI*Z3)*FUNC(Z+EI*Z3)+(Z+EI*Z4)*FUNC(Z+EI*Z4))
22          BCONJ=56.*BCONJ
23          RETURN
24          END
      C
      CCC   DEFINIR QUE LE CALCUL EST EN NOMBRES COMLEXES
      C

25          COMPLEX Z,Z1,Z2,Z3,Z4,EI,CMPLX,FUNC
26          COMPLEX P,P1,P2,Q,Q1,Q2,D,D1,D2,S,S1,S2,BCONJ
      C
      CCC   DONNER LES DIMENSIONS ET LE NOMBRE DE RECTANGLES (8 PAR EXEMPLE)
      C
27          DIMENSION XC(8),YO(8),A(8),B(8)
28          DIMENSION Z1(8),Z2(8),Z3(8),Z4(8)
29          A(1)=.003
30          A(2)=.0085
31          A(3)=.0155
32          A(4)=.021
33          A(5)=.018
34          A(6)=.014
35          A(7)=.0085
36          A(8)=.0025
37          B(1)=.002
38          B(2)=.002
39          B(3)=.002
40          B(4)=.002
41          B(5)=.002
42          B(6)=.002
43          B(7)=.002
```

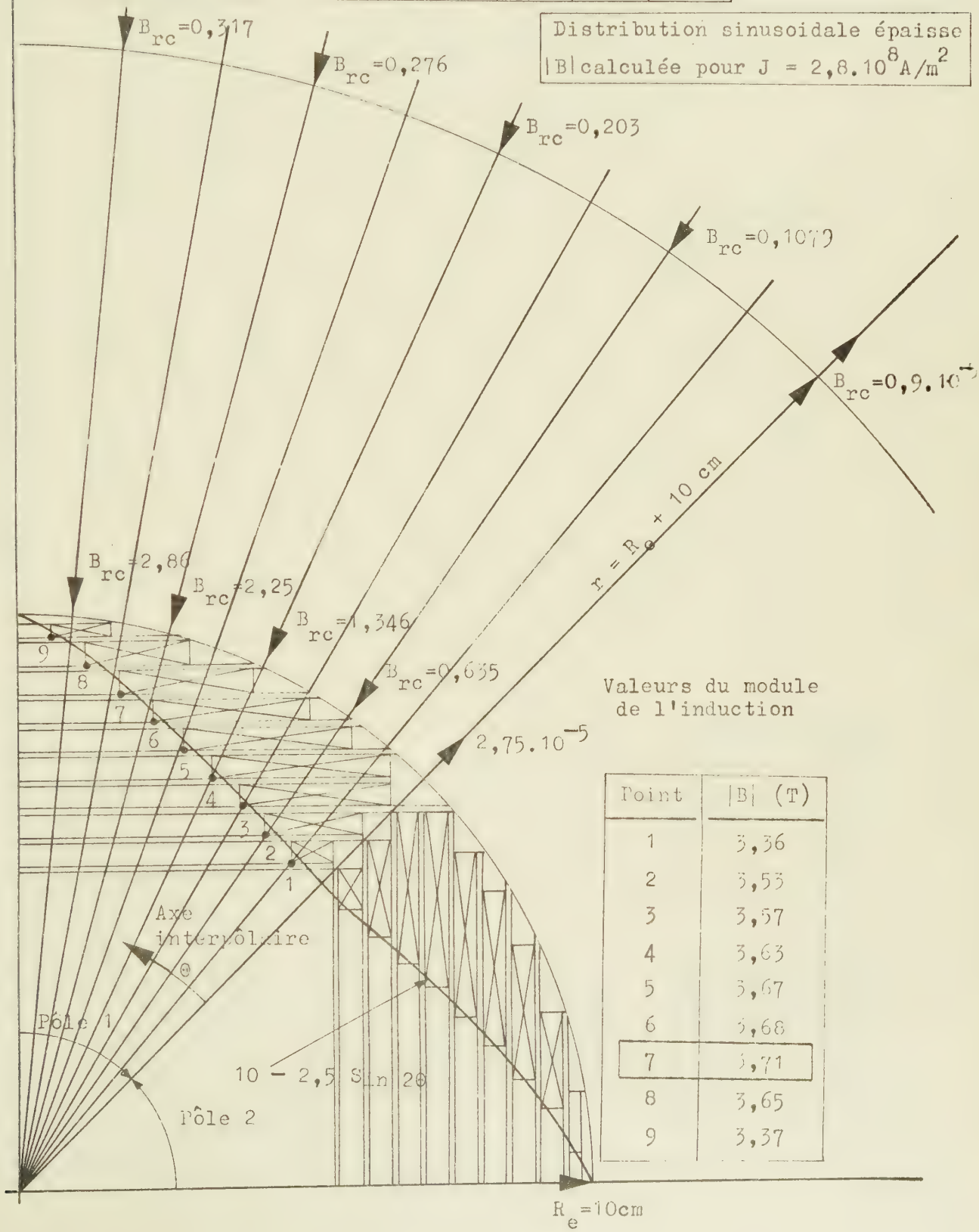
```
      B(8)=.002
      XO(1)=.052
      XO(2)=.0515
      XO(3)=.0495
      XO(4)=.044
      XO(5)=.040
      XO(6)=.037
      XO(7)=.0325
      XO(8)=.0275
      YO(1)=.058
      YO(2)=.063
      YO(3)=.068
      YO(4)=.073
      YO(5)=.078
      YO(6)=.083
      YO(7)=.088
      YO(8)=.093
      EI=CMPLX(0.,1.)
C
CCC   CALCUL DES AFFIXES DES SOMMETS DES RECTANGLES
C
      DO 10 I=1,8
      Z1(I)=CMPLX(XO(I)+A(I),YO(I)+B(I))
      Z2(I)=CMPLX(XO(I)-A(I),YO(I)+B(I))
      Z3(I)=CMPLX(XO(I)-A(I),YO(I)-B(I))
      Z4(I)=CMPLX(XO(I)+A(I),YO(I)-B(I))
   10 CONTINUE
      PI=3.1416
C
CCC   CALCUL DE L'INDUCTION SUR LES FACES HORIZONTALES
C
      DO 23 M=1,8
      DO 23 L=1,2
      DO 16 K=1,99
      S1=0.
      DO 13 I=1,8
      C1=(XO(M)-A(M)+K*A(M)/50.)
      IF(L.EQ.1)E1=YO(M)-B(M)
      IF(L.EQ.2)E1=YO(M)+B(M)
      Z=CMPLX(E1,C1)
      Q1=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      Q1X=REAL(Q1)
      Q1Y=AIMAG(Q1)
      Z=CMPLX(C1,E1)
      IF(I.EQ.M.AND.L.EQ.1)GO TO 11
      P1=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      GO TO 12
   11 P1=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)-(Z-Z4(I))*2.*PI*EI*56.
   12 P1X=REAL(P1)
      P1Y=AIMAG(P1)
      D1X=P1X+Q1Y
      D1Y=P1Y+Q1X
      D1=CMPLX(D1X,D1Y)
   13 S1=S1+D1
      S1X=REAL(S1)
      S1Y=-AIMAG(S1)
      BB=SQRT(S1X*S1X+S1Y*S1Y)
C
CCC   CALCUL DES EFFORTS S'EXERCANT SUR LES FACES HORIZONTALES
C
```

```
      EHX=C.
      EHY=C.
      DELTA1=A(M)/50.
      IF(L.EQ.2)GO TO 14
      EHY=((S1X*S1X-S1Y*S1Y)/(8.*PI*1.E-07))*DELTA1
      EHX=((-S1X*S1Y)/(4.*PI*1.E-07))*DELTA1
      GO TO 15
   14 EHY=((S1Y*S1Y-S1X*S1X)/(8.*PI*1.E-07))*DELTA1
      EHX=((+S1X*S1Y)/(4.*PI*1.E-07))*DELTA1
   15 EHX=EHX+EHX
      EHY=EHY+EHY
   16 WRITE(6,100)S1,Z,M,L,K,BB
      WRITE(6,101)EHX,EHY,M,L
C
CCC   CALCUL DE L'INDUCTION SUR LES FACES VERTICALES
C
      DO 22 M=1,19
      S2=C.
      DO 19 I=1,8
      IF(L.EQ.1)C2=XO(M)-A(M)
      IF(L.EQ.2)C2=XO(M)+A(M)
      E2=(YO(M)-B(M)+N*B(M)/10.)
      Z=CMPLX(E2,C2)
      Q2=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      Q2X=REAL(Q2)
      Q2Y=AIMAG(Q2)
      Z=CMPLX(C2,E2)
      IF(I.EQ.M.AND.L.EQ.1)GO TO 17
      P2=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      GO TO 18
   17 P2=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)+4.*A(I)*PI*EI*56.
   18 P2X=REAL(P2)
      P2Y=AIMAG(P2)
      D2X=P2X+Q2Y
      D2Y=P2Y+Q2X
      D2=CMPLX(D2X,D2Y)
   19 S2=S2+D2
      S2X=REAL(S2)
      S2Y=-AIMAG(S2)
      BB=SQRT(S2X*S2X+S2Y*S2Y)
C
CCC   CALCUL DES EFFORTS S'EXERCANT SUR LES FACES VERTICALES
C
      EVX=C.
      EVY=C.
      DELTA2=B(M)/10.
      IF(L.EQ.2)GO TO 20
      EVX=((S2Y*S2Y-S2X*S2X)/(8.*PI*1.E-07))*DELTA2
      EVY=((-S2X*S2Y)/(4.*PI*1.E-07))*DELTA2
      GO TO 21
   20 EVY=((+S2X*S2Y)/(4.*PI*1.E-07))*DELTA2
      EVX=((S2X*S2X-S2Y*S2Y)/(8.*PI*1.E-07))*DELTA2
   21 EVX=EVX+EVX
      EVY=EVY+EVY
   22 WRITE(6,102)S2,Z,M,L,N,BB
      WRITE(6,103)EVX,EVY,M,L,Z
   23 CONTINUE
C
CCC   CALCUL DE L'INDUCTION A L'EXTERIEUR DE L'INDUCTEUR
C
```

```
      DO 27 J=1,2
      DO 27 II=1,45,2
      IA=90-II
      S=0.
      DO 26 I=1,8
      R=.10
      IF(J.EQ.2)GO TO 24
      X=R*COS((PI/180.)*II)
      Y=R*SIN((PI/180.)*II)
      GO TO 25
24    X=(R+.1)*COS((PI/180.)*II)
      Y=(R+.1)*SIN((PI/180.)*II)
25    Z=CMPLX(X,Y)
      Q=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      QX=REAL(Q)
      QY=AIMAG(Q)
      Z=CMPLX(Y,X)
      P=BCONJ(Z,Z1(I),Z2(I),Z3(I),Z4(I),EI)
      PX=REAL(P)
      PY=AIMAG(P)
      DX=PX+QY
      DY=PY+QX
      D=CMPLX(DX,DY)
26    S=S+D
      SX=REAL(S)
      SY=AIMAG(S)
      BB=SQRT(SX*SX+SY*SY)
      BR=SX*COS((PI/180.)*IA)+SY*SIN((PI/180.)*IA)
      BT=SX*SIN((PI/180.)*IA)+SY*COS((PI/180.)*IA)
27    WRITE(6,104)S,IA,J,BB,BR,BT
100   FORMAT(3X,'BX='F8.4,3X,'-BY='F8.4,3X,'X='F8.4,3X,'Y='F8.4
     1,3X,'M='I2,3X,'L='I2,3X,'K='I2,6X,'BB='F10.5)
101   FORMAT(6X,'FHX='F15.8,6X,'FHY='F15.8,6X,'M='I2,6X,'L='I2)
102   FORMAT(3X,'BX='F8.4,3X,'-BY='F8.4,3X,'X='F8.4,3X,'Y='F8.4
     1,3X,'M='I2,3X,'L='I2,3X,'N='I2,6X,'BB='F10.5)
103   FORMAT(6X,'FVX='F15.8,6X,'FVY='F15.8,6X,'M='I2,6X,'L='I2)
104   FORMAT(6X,'BX='F10.5,6X,'-BY='F10.5,6X,'IA='I3,6X,'J='I2
     1,3X,'BB='F8.4,3X,'BR='F8.4,3X,'BT='F8.4)
      STOP
      END
```

Figure (2-19)

$\Theta_e = 2\Theta$	0	20	40	60	80	90
$(B_{rc})_{Re+10}$ T	$0,9 .10^{-5}$	0,1079	0,203	0,276	0,317	0,32
$(B_{rc})_s$ T	0	0,066	0,124	0,168	0,191	0,194
$(B_{rc})_{Re}$ T	$2,75.10^{-5}$	0,635	1,346	2,25	2,86	2,89
$(B_{rc})_{s\ Re}$	0	0,424	0,797	1,07	1,22	1,24

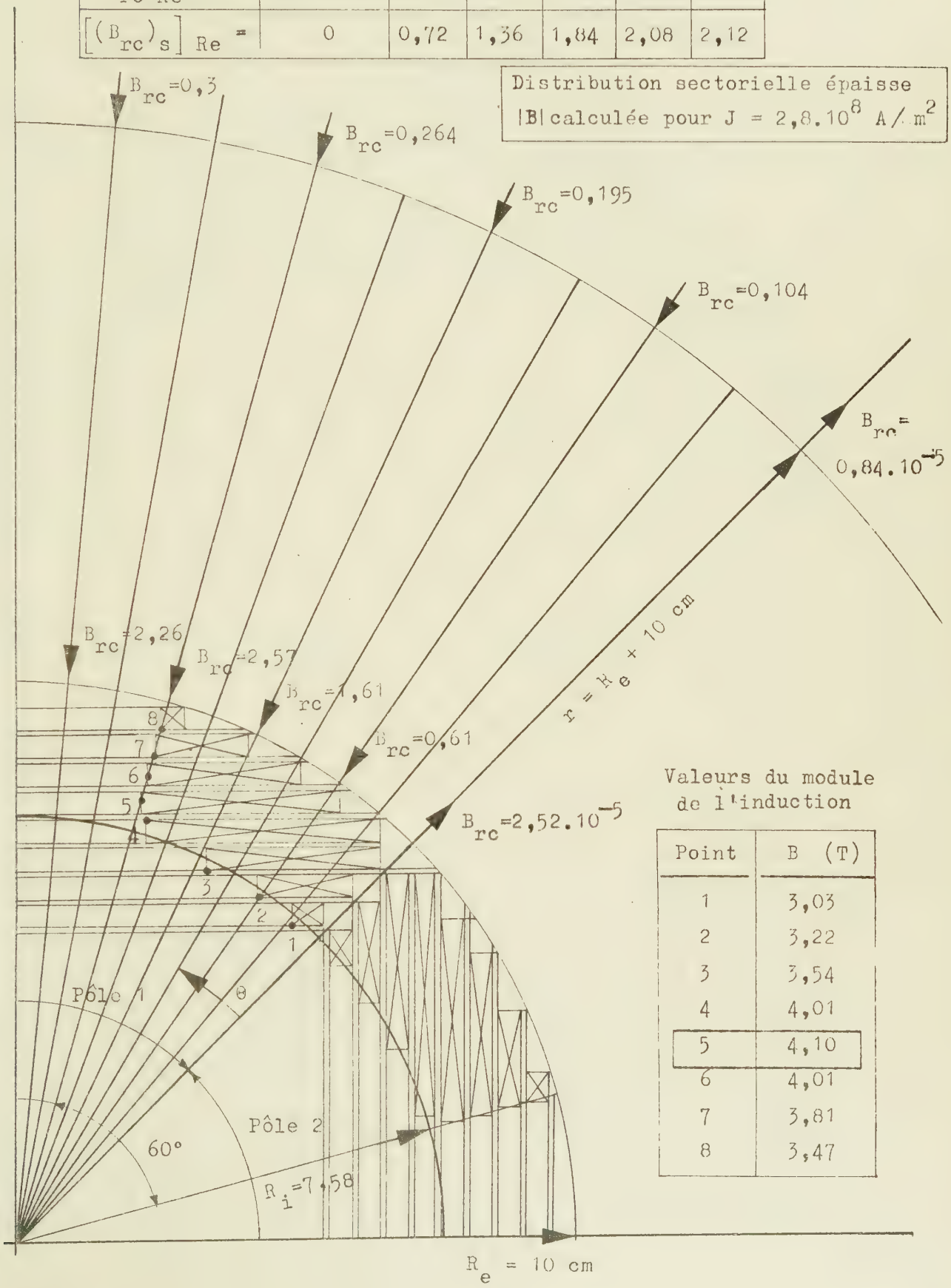


Point	|B| (T)
1	3,36
2	3,53
3	3,57
4	3,63
5	3,67
6	3,68
7	3,71
8	3,65
9	3,37

Figure (2-20)

θ_e = 20	0	20	40	60	80	90
$(B_{rc})_{Re+10}$	$0,84.10^{-5}$	0,104	0,195	0,264	0,3	0,304
$[(R_{rc})_s]_{Re+10}$	0	0,104	0,195	0,262	0,298	0,303
$(B_{rc})_{Re}$ =	$2,52.10^{-5}$	0,61	1,61	2,57	2,26	2,29
$[(B_{rc})_s]_{Re}$ =	0	0,72	1,36	1,84	2,08	2,12

Distribution sectorielle épaisse
|B| calculée pour J = $2,8.10^8$ A/m^2

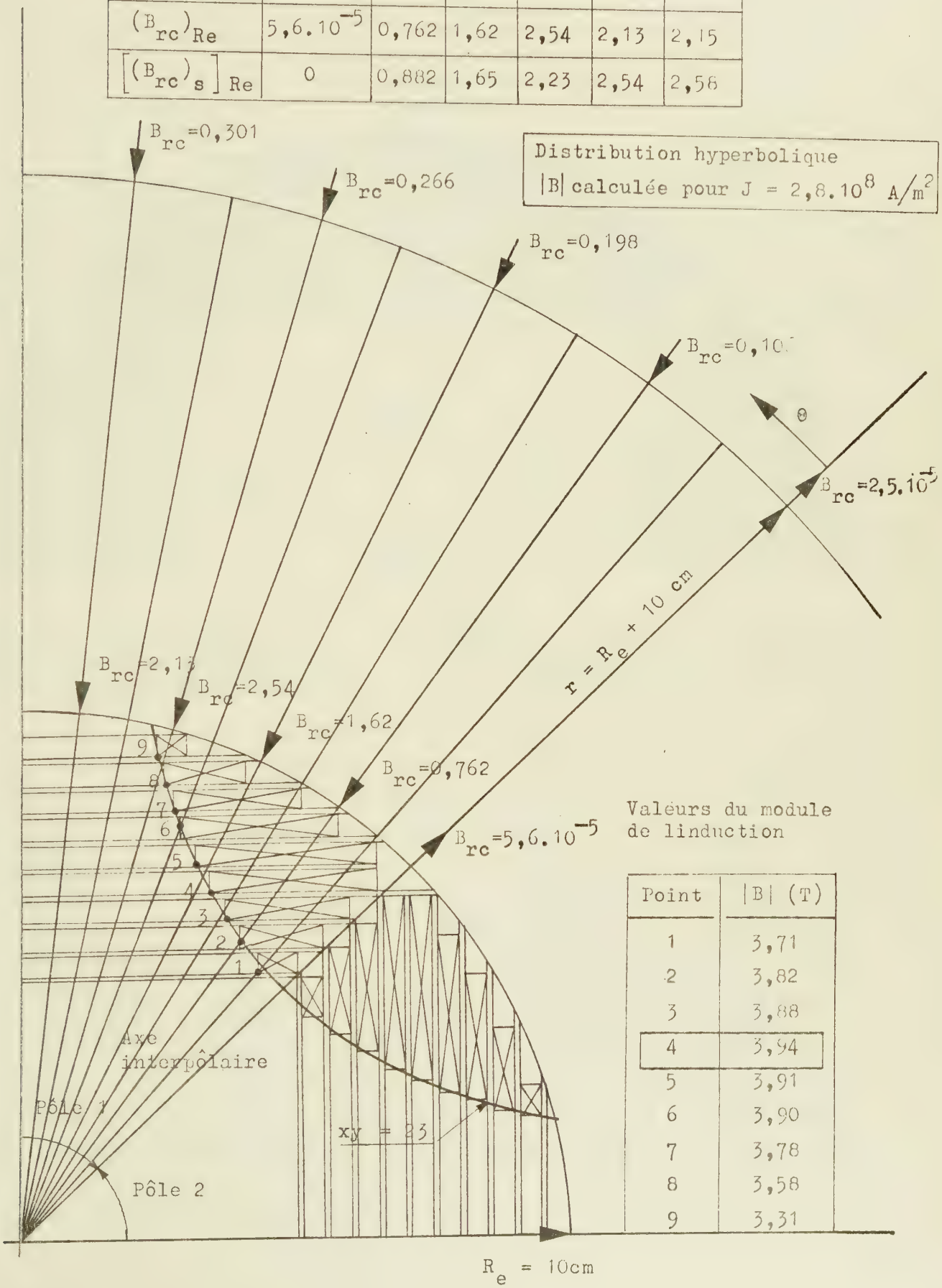


Valeurs du module de l'induction

Point	B (T)
1	3,03
2	3,22
3	3,54
4	4,01
5	4,10
6	4,01
7	3,81
8	3,47

Figure (2-21)

Θ_e = 20	0	20	40	60	80	90
$(B_{rc})_{Re+10}$	$2,5.10^{-5}$	0,106	0,198	0,266	0,301	0,305
$(B_{rc})_s$	0	0,108	0,204	0,275	0,313	0,318
$(B_{rc})_{Re}$	$5,6.10^{-5}$	0,762	1,62	2,54	2,13	2,15
$[(B_{rc})_s]_{Re}$	0	0,882	1,65	2,23	2,54	2,56

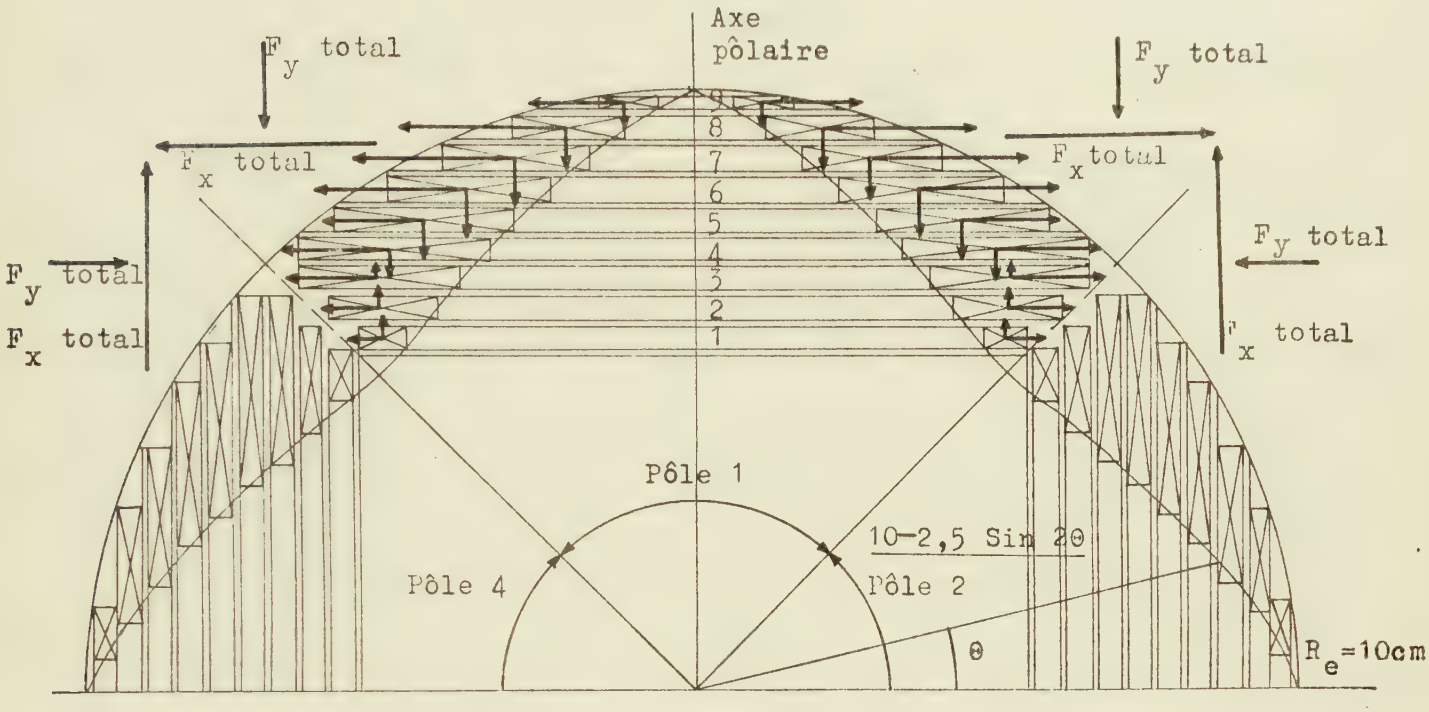


Valeurs du module de linduction

Point	|B| (T)
1	3,71
2	3,82
3	3,88
4	3,94
5	3,91
6	3,90
7	3,78
8	3,58
9	3,31

Figure (2-22)

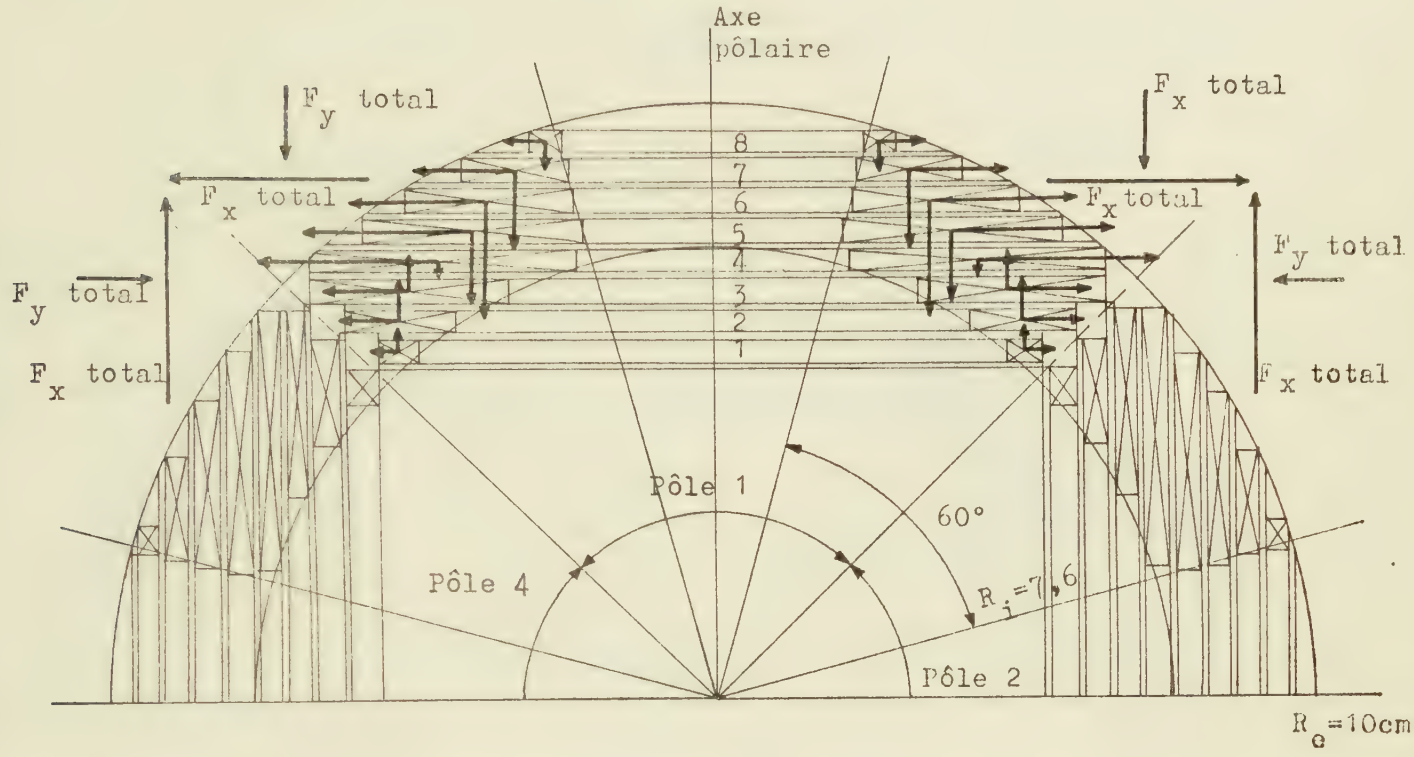
Les efforts électromagnétiques s'exerçant sur un quadripole supraconducteur à répartition sinusoidale épaisse, de rayon R_e = 10cm



Efforts approchés calculés aux centres des rectangles par la loi de Laplace pour le demi pôle n° 1			Efforts calculés par le tenseur de contrainte de Maxwell pour le demi pôle n° 1	
F_x (kg f)	F_y (kg f)		F_x (kg f)	F_y (kg f)
1085	1165	1	1014	1026
1988	1696	2	1880	1512
1804	434	3	1743	434
2031	−1424	4	1909	−1197
3107	−2239	5	2773	−2037
3687	−2887	6	3357	−2701
4182	−2652	7	3833	−2513
4154	−2146	8	3703	−2037
1331	−360	9	1223	−395
F_x total =23452	F_y total =−8413		F_x total =21435	F_y total =−7926

Figure (2-23)

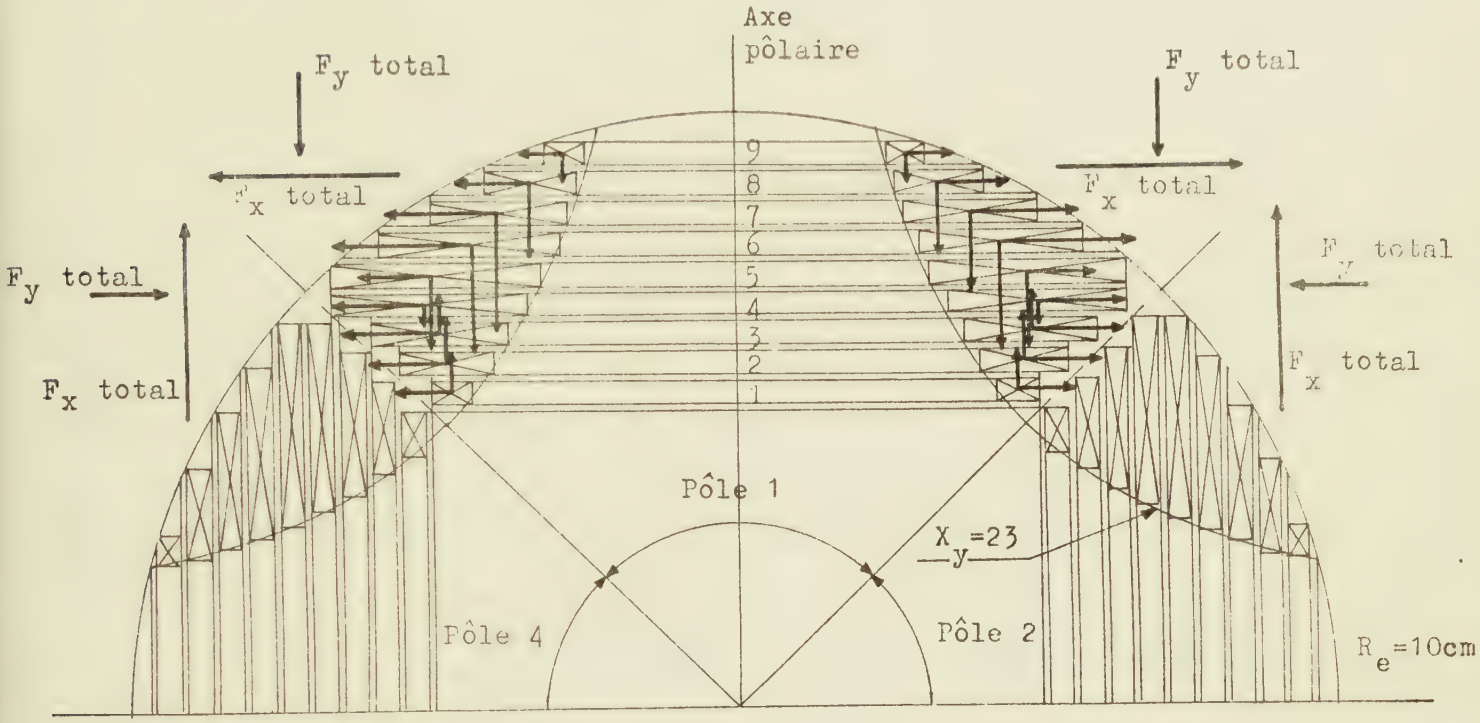
Les efforts électromagnétiques s'exerçant sur un quadripole supraconducteur à repartition sectorielle, de rayon R_e = 10cm



Efforts approchés calculés aux centres des rectangles par la loi de Laplace pour le demi pôle n° 1			Efforts calculés par le tenseur de contrainte de Maxwell pour le demi pôle n° 1	
F_x (kgf)	F_y (kgf)		F_x (kgf)	F_y (kgf)
870	986	1	819	868
1842	1757	2	1726	1583
2892	1111	3	2548	1040
5209	−384	4	4474	− 264
4938	−2659	5	4459	−2847
3946	−4011	6	3718	−3894
2957	−3348	7	2691	−3038
1068	−965	8	924	−888
F_x total =22722	F_y total =−7513		F_x total =21159	F_y total =−7440

Figure (2-24)

Les efforts électromagnétiques s'exerçant sur un quadripole supraconducteur à répartition hyperbolique, de rayon R_e = 10cm



Efforts approchés calculés aux centres des rectangles par la loi de Laplace pour le demi pôle n° 1			Efforts calculés par le tenseur de contrainte de Maxwell pour le demi pôle n° 1	
F_x (kgf)	F_y (kgf)		F_x (kgf)	F_y (kgf)
1506	1547	1	1383	1264
2672	2057	2	2506	1819
3148	1406	3	2977	1234
2846	−607	4	2757	−556
2520	−3002	5	2445	−2685
3547	−3835	6	3220	−3510
3273	−4061	7	3017	−3715
2932	−2889	8	2575	−2641
1134	−826	9	990	−786
$F_x$total =235778	$F_y$total =−10210		$F_x$total =21862	$F_y$total =−9576

2.5.5. Lignes de force de champ magnétique d'un quadrupole quelconque

Pour tracer les lignes de force de champ magnétique du quadrupôle, nous savons que ces lignes sont données par l'équation

$$p' = cte$$

où

p' est le potentiel vecteur magnétique [cf. §2.5.2. équation (2.69)]

Nous utiliserons le potentiel vecteur magnétique complexe

$$W = - p' + \mu_o \, i \, v^*$$

défini précédemment § (2.5.2.) eqs (2.72) (2.77) et (2.78)

On a donc pour le conducteur rectangulaire

$$W = - i \frac{\mu_o j}{2\pi} a^2 \left[\frac{(Z-Z_1)^2}{2} Lg(Z-Z_1) - \frac{(Z-Z_2)^2}{2} Lg(Z-Z_2) \right.$$

$$\left. + \frac{(Z-Z_3)^2}{2} Lg(Z-Z_3) - \frac{(Z-Z_4)^2}{2} Lg(Z-Z_4) + 6 i \frac{b}{a} \right] \quad (2\text{-}92)$$

les composantes de l'induction magnétique étant données par

$$B'_y + i B'_x = \frac{1}{a} \frac{dW}{dZ} .$$

D'une manière analogue à celle du paragraphe (2.5.3.1) nous pouvons retrouver la formule analytique du potentiel vecteur magnétique complexe dΩ à l'ensemble de rectangles hachurés de la Fig. (2.15).

Le potentiel vecteur magnétique complexe W_1 dΩ au rectangle Cm_1 est donné par l'équation (2.92).

Les potentiels vecteurs magnétiques complexes W_2, W_3 et W_4 dus aux rectangles C_{m2}, C_{m3}, C_{m4} du groupe m sont alors obtenus en multipliant (comme pour le calcul du paragraphe 2.5.3.1) les affixes Z_q (q = 1,2, 3, 4) par i, -1, -i respectivement et en tenant compte du changement de signe du courant.

Le potentiel vecteur magnétique complexe dû aux quatre rectangles du groupe C_m en un point M d'affixe ($Z = X + iY$) quelconque à l'extérieur des rectangles et à la surface de ceux-ci a alors, tous calculs faits, pour expression :

$$
\begin{aligned}
W = -\frac{i\,\mu_0 J}{4\pi}\Big[& + (Z-Z_1)^2 Lg(z-Z_1) - (Z-Z_2)^2 Lg(z-Z_2) \\
& + (Z-Z_3)^2 Lg(z-Z_3) - (Z-Z_4)^2 Lg(z-Z_4) \\
& + (Z-iZ_1)^2 Lg(z-iZ_1) - (Z-iZ_2)^2 Lg(z-iZ_2) \\
& + (Z-iZ_3)^2 Lg(z-Z_3) - (Z-iZ_4)^2 Lg(z-iZ_4) \\
& + (z+Z_1)^2 Lg(z+Z_1) - (z+Z_2)^2 Lg(z+Z_2) \\
& + (z+Z_3)^2 Lg(z-Z_3) - (z+Z_4)^2 Lg(z+Z_4) \\
& + (z+iZ_1)^2 Lg(z+iZ_1) - (z+iZ_2)^2 Lg(z+iZ_2) \\
& + (z+iZ_3)^2 Lg(z+iZ_3) - (z+iZ_4)^2 Lg(z+iZ_4)\Big]
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}93)
$$

Par raison de symétrie le potentiel vecteur complexe au point Z(X, Y) dû au groupe de rectangles Dm (rectangles non hachurés de la figure 2.15) est égal à celui calculé au point M' d'affixe $Z' = Y + iY$ produit par le groupe c_m - eq (2.93).

Donc pour obtenir le potentiel vecteur complexe total dû a l'ensemble des rectangles de la Fig. (2.15), nous devons appliquer l'équation (2.93) au point M(X,Y) puis au point M'(Y,X) et sommer les résultats. En prenant la partie réelle de l'expression ainsi obtenue on obtient le potentiel vecteur p'.

Nous avons effectué un calcul numérique pour les trois formes d'inducteur de la Fig. (2.10) et nous avons tracé les lignes de forces du champ magnétique produit par ces trois formes de répartition sur les Figures (2.25), (2.26) et (2.27).

Figure (2-25) : Lignes de force du champ magnétique produit par un quadripole à répartition sinusoidale épaisse de la figure (2-10a)

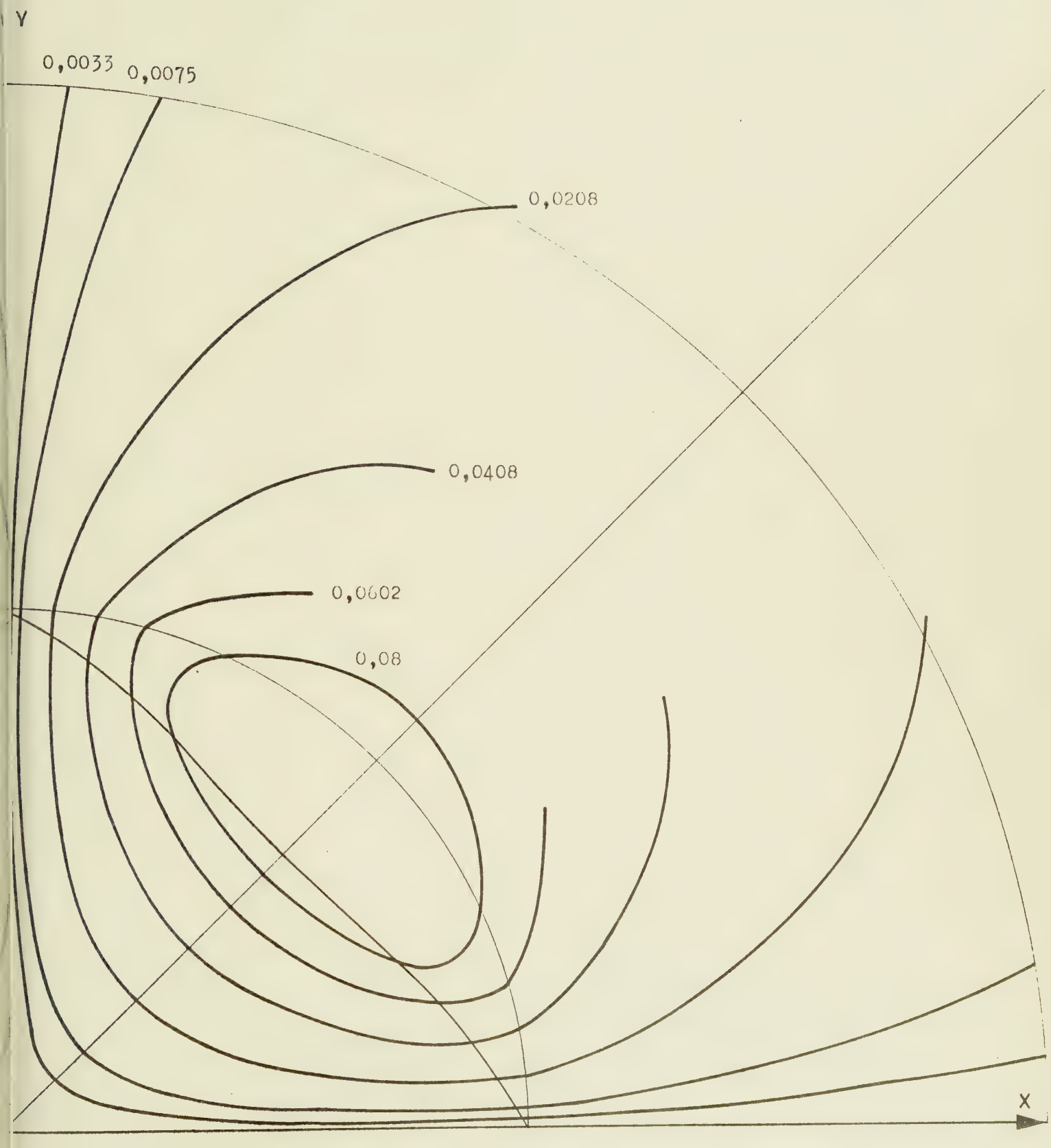


Figure (2-26) : Lignes de force du champ magnétique produit par un quadripole à répartition secteurielle épaisse ($\theta_b = 60°$) de la figure (2-10b)

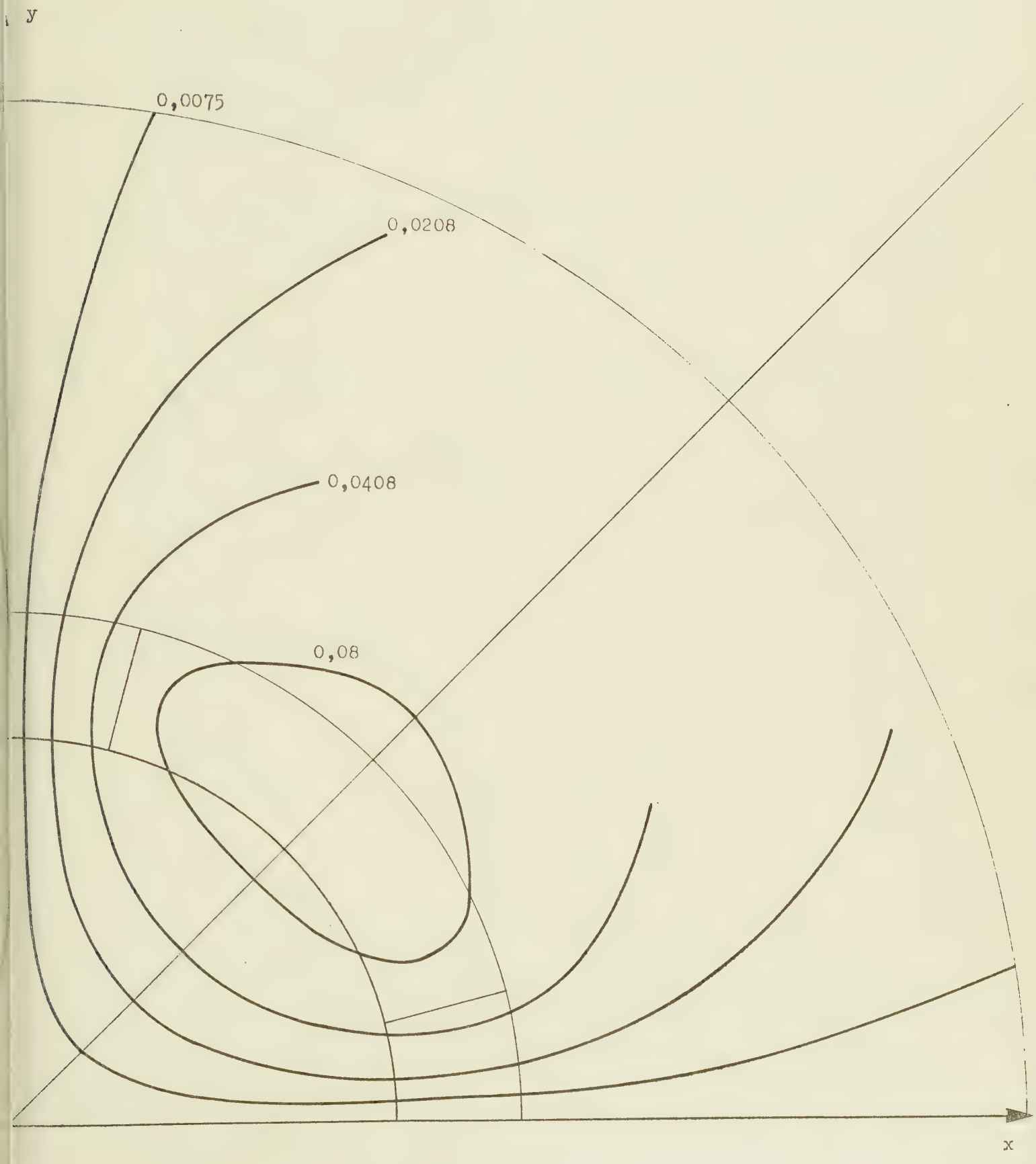
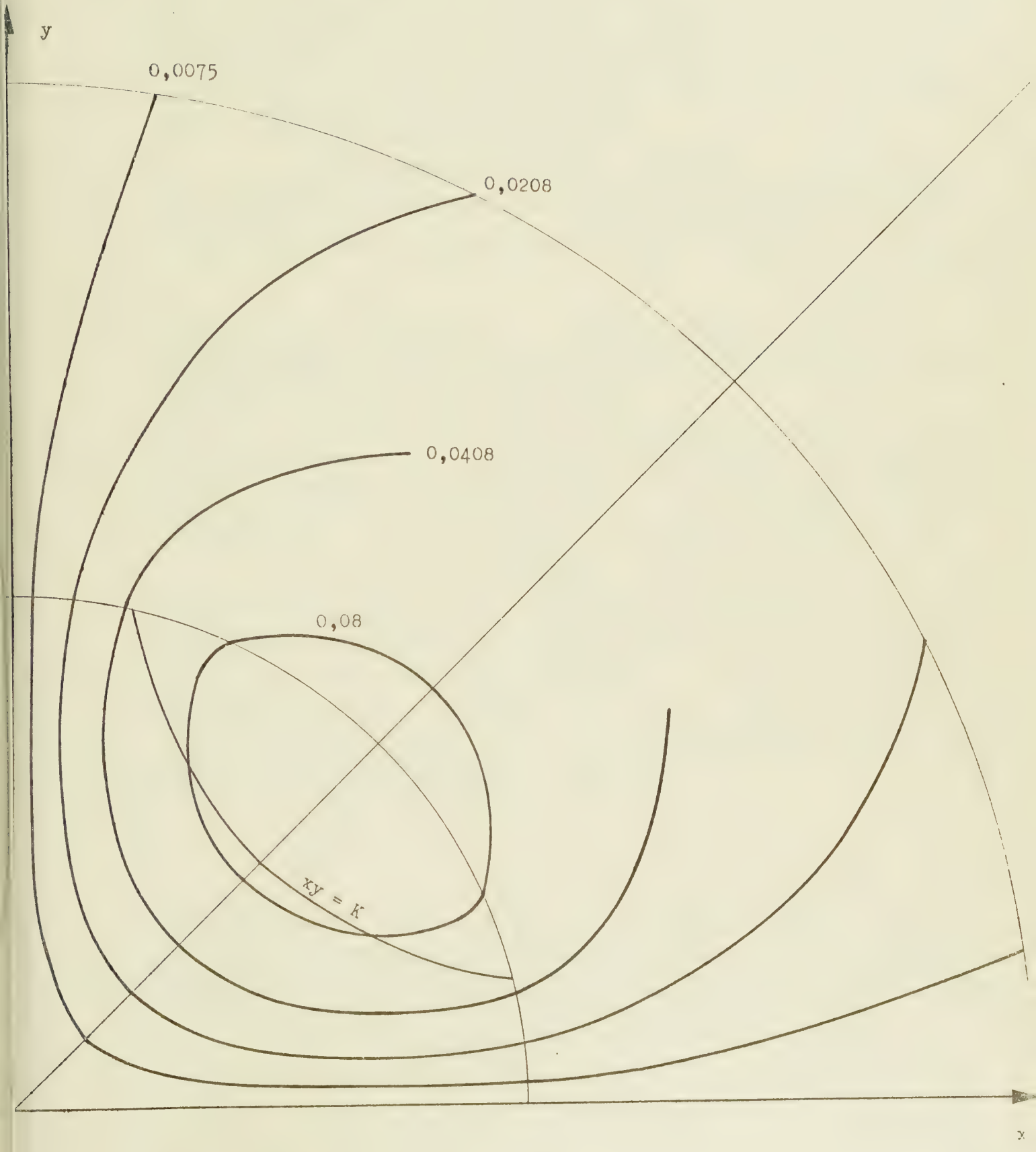


Figure (2–27) : Lignes de force du champ magnétique produit par un quadripole à répartition hyperbolique de la figure (2–10c)



2.6. OPTIMISATION DE LA FORME DE REPARTITION D'INDUCTEUR

Les matériaux supraconducteurs utilisés dans une machine électrique tournante interviennent pour une grande part dans son coût total. Dans ces conditions, il est raisonnable d'optimiser la forme de répartition des conducteurs dans l'inducteur, pour une quantité de supraconducteur donnée en fonction de la puissance électromagnétique recueillie sur l'induit d'une machine supraconductrice à deux enroulements.

Nous espérons ainsi avoir une idée de la morphologie de l'inducteur conduisant à la plus grande puissance volumique. Cette optimisation particulière est réalisée de la façon suivante :

2.6.1. Calcul sommaire de la puissance électromagnétique moyenne et de la puissance volumique moyenne

Nous supposons que le bobinage d'induit est triphasé et que les conducteurs de chaque phase sont répartis en quatre secteurs (un secteur d'angle $\frac{\pi}{6}$ par pôle), les axes de deux secteurs d'un même pôle étant espacés d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ [Fig. (2-28)].

Le calcul de la puissance se fait de la façon suivante. Dans un secteur occupé par la phase 1, considérons un conducteur élémentaire de section ds et longueur ℓ situé à une distance r de l'axe de la machine et à un angle φ de l'axe de la phase 1 (cf. Fig. 2-28) ; ce conducteur est parcouru par un courant sinusoïdal de densité maximal j_o et diphasé d'un angle α par rapport à la tension aux bornes de la phase.

Soit

$$j_s = j_o \sin (\omega t + \alpha) \qquad (2.94)$$

La puissance peut être calculée en supposant l'inducteur fixe et l'induit tournant à la vitesse angulaire Ω. Le conducteur considéré peut donc être supposé mobile à une vitesse tangentielle

$$U = r\,\Omega \qquad (2.95)$$

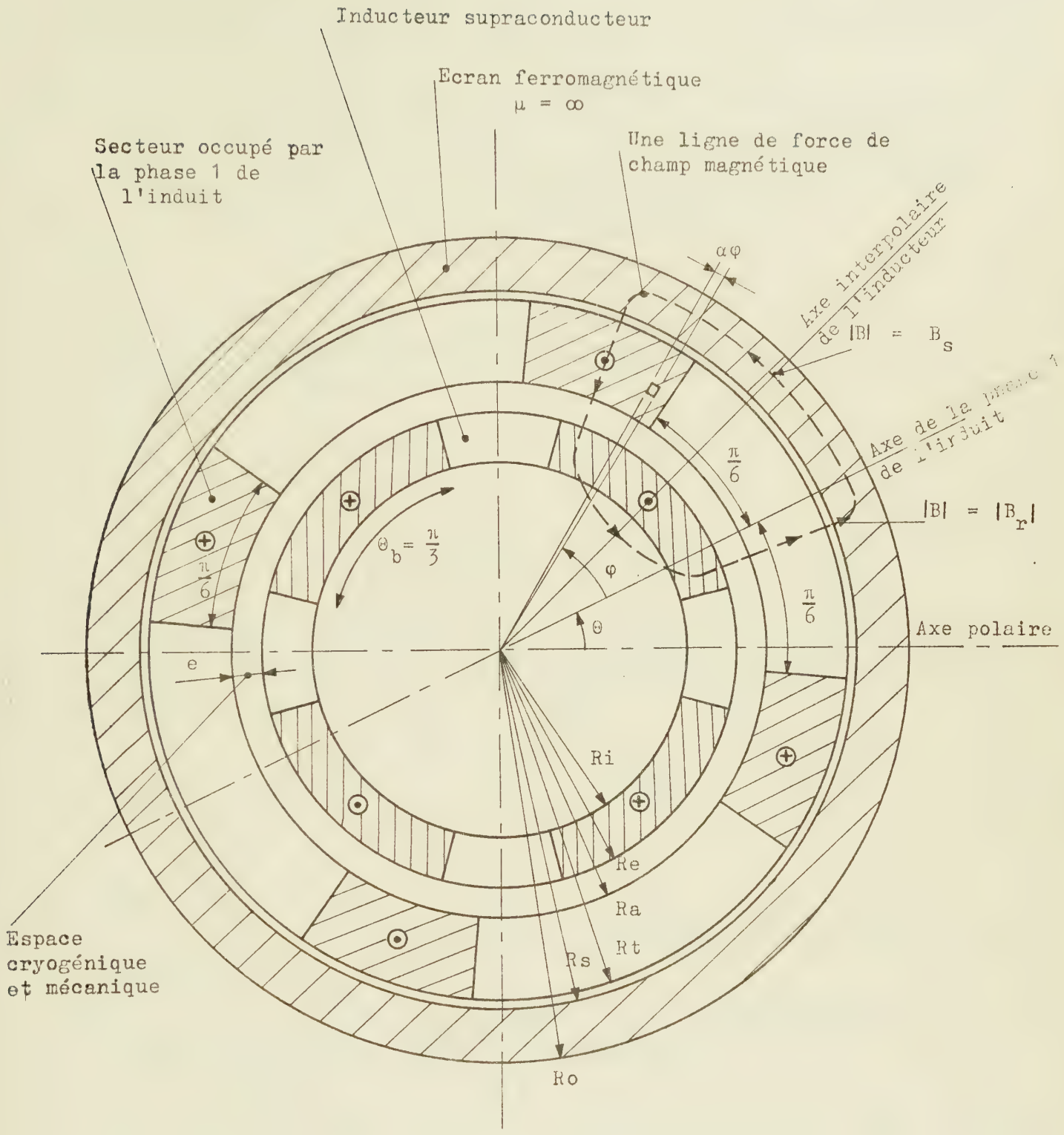


Figure (2–28) : Section droite schématique d'une machine électrique à l'inducteur supraconducteur cylindrique à deux enroulements. (une seule phase de l'induit est représentée)

Nous savons d'autre part que pour le calcul de la puissance électromagnétique d'une machine le champ inducteur peut être pris seul en compte au niveau de l'induit.

Soit B_r et B_t les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique due à l'inducteur supraconducteur au niveau de l'induit. L'effort élémentaire tangentiel contribuant au couple de la machine s'écrit alors simplement :

$$dF = j_s \, B_r \cdot \ell \, dS \qquad (2.96)$$

La puissance électromagnétique produite dans ce conducteur a alors pour expression :

$$dP = j_s \cdot B_r \cdot \ell \cdot u \cdot dS \qquad (2.97)$$

soit

$$dP = j_s \cdot B_r \cdot 1 \cdot \Omega r^2 \, dr \, d\varphi \qquad (2.98)$$

En revenant aux paragraphes (2-2), (2-3), (2-4) pour les valeurs de B_r on constate que B_r pour une répartition donnée est de la forme

$$B_r = D(r) \sin 2 (\vartheta + \varphi) \qquad (2.99)$$

avec

$$\vartheta = \Omega t + \beta = \frac{\omega t}{2} + \beta$$

et

β est l'angle à l'origine du temps [30]. (On peut choisir $\beta = 0$)

Un secteur de la phase 1 est alors le siège d'une puissance instantanée ayant pour expression

$$p = \int_{Ra}^{R_t} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \ell \cdot j_o \cdot \Omega \cdot r^2 \cdot D(r) \cdot \sin(\omega t + 2\varphi) \cdot \sin(\omega t + \alpha) \, dr \, d\varphi \qquad (2.100)$$

R_a : rayon intérieur de l'induit

R_t : rayon extérieur de l'induit

La puissance électromagnétique apparente $\overline{P}$ s'écrit en tenant compte des 12 secteurs de l'induit :

$$\overline{P} = \int_{R_a}^{R_t} 3\, l\, j_o\, \Omega\, r^2\, D(r)\, dr \qquad (2.101)$$

avec

a) $$D(r) = \frac{-j}{2\pi} \mu_o \sin\frac{\theta e}{2}\, r \left[Z^4 + \left(\frac{Re}{r}\right)^4\right](1 - X^4) \qquad (2.102)$$

pour l'inducteur à répartition sectorielle épaisse.

Soit :

$$\overline{P} = -\frac{3\sqrt{6}}{16\pi}\, l \cdot j_{eff} \cdot j \cdot \Omega \cdot \mu_o \cdot Re^4 \cdot (1-X^4)\,(Y^4 + 4\,Lg\,YT - T^4) \qquad (2.103)$$

avec j_{eff} la valeur efficace de la densité de courant d'induit

$$\frac{\theta e}{2} = \theta_b = 60^\circ$$

$$X = \frac{Re}{Ri}\ ,\ Y = \frac{Ra}{RS}\ ,\ Z = \frac{Re}{RS}\ ,\ T = \frac{Rt}{RS}$$

b) $$D(r) = \frac{-j}{2\pi} \mu_o \left(\frac{1}{r^3} + \frac{r}{RS^4}\right)\left(R_e^2 Q^2 + 4K^2 Lg \frac{2K}{R_e^2 + Q^2}\right) \qquad (2.104)$$

pour l'inducteur à répartition hyperbolique,

Soit :

$$\overline{P} = -\frac{3\sqrt{2}}{8\pi}\, \mu_o \cdot J_{eff} \cdot j \cdot \Omega \cdot l \cdot \left(R_e^2 Q^2 + 4K^2 Lg \frac{2K}{R_e^2+Q^2}\right)\left(Y^4 + 4\,Lg\,YT - T^4\right) \qquad (2.105)$$

avec

$$Q^2 = \sqrt{Re^2 - 4K^2}$$

c)

$$D(r) = -\frac{4j\,a}{315\sqrt{2}\,\pi}\,\mu_o\left(\frac{1}{r^3}+\frac{r}{R_s^4}\right)\left(105Re^3-126aRe^2+72Rea^2-16a^3\right) \quad (2.106)$$

pour un inducteur à répartition sinusoïdale épaisse.

Soit :

$$\bar{P} = -\frac{\ell . j . \Omega . a . j_{eff}\cdot\mu_o}{105\,\pi}\left(105Re^3-126aRe^2+72Rea^2-16a^3\right)\times$$

$$\left(Y^4+4\,Lg\,YT-T^4\right) \quad (2.107)$$

d) Les pertes Joules produites dans l'induit se calculent à l'aide de l'expression

$$P_j = \rho . J_{eff}^2 \int_{\tau} d\tau \quad (2.108)$$

avec

ρ : la résistivité de conducteurs d'induit

τ : le volume de l'induit.

Soit

$$P_j = \rho\cdot j_{eff}^2\cdot\ell\cdot\pi R_a^2\left[\left(\frac{R_t}{Ra}\right)^2-1\right]$$

ou

$$P_j = \rho\cdot j_{eff}\cdot\ell\cdot\pi R_a^2\left(\frac{T^2}{Y^2}-1\right) \quad (2.109)$$

2.6.2. Méthode de calcul utilisée pour l'optimisation de la forme de répartition des conducteurs dans l'inducteur :

Soient :

V : Le volume de supraconducteur par pôle qu'on doit utiliser, supposé constant quel que soit la morphologie de l'inducteur.

ℓ : la longueur axiale "efficace" de l'inducteur. C'est la longueur de la partie rectiligne des conducteurs.

S : la section d'un demi-pôle

La longueur de supraconducteur utilisé dans les têtes de bobines a été prise pour des raisons de simplification égale à 20 % de la longueur axiale "efficace" de l'inducteur. La longueur totale d'une spire à pas diamétral est alors :

$$L = 2{,}4\ \ell \qquad (2.110)$$

C : est le coefficient de remplissage du bobinage défini par :

$$C = \frac{\text{section propre totale des conducteurs supraconducteurs par pole}}{\text{section totale d'un pôle}}$$

$\delta = 1 - c$ est alors le coefficient de foisonnement correspondant au conducteur supraconducteur utilisé (section circulaire, ou rectangulaire), aux isolants électrique utilisés entre couches, etc...

Nous avons pris $\delta = 0{,}3$

e : l'épaisseur cryogenique et le jeu mécanique entre l'inducteur et l'induit. Pour notre calcul numérique ou nous considérons pour Re des valeurs de l'ordre de 10 à 15 cm, nous avons supposé e constante

avec $e = 1{,}2$ cm

on a donc

$$Ra = Re + e \qquad (2.111)$$

Le volume de supraconducteur par pôle a alors pour expression

$$V = 2,4 \cdot \ell \; S \; (1 - \delta) \qquad (2.112)$$

avec

a) $$S = \frac{\pi}{12} (R_e^{\,2} - R_i^{\,2}) \qquad (2.113)$$

pour une répartition sectorielle épaisse d'angle $\theta_b = 60°$

b) $$S = K \, Lg \frac{\sqrt{2K}}{\sqrt{\frac{Re^2+2K}{2}} + \sqrt{\frac{Re^2-2K}{2}}} + \frac{Re^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc sin} \sqrt{\frac{Re^2+2K}{2\,Re^2}}\right) \qquad (2.114)$$

pour une répartition hyperbolique

c) $$S = \frac{1}{2} (R_e a - \frac{a^2 \pi}{8}) \qquad (2.115)$$

pour une répartition sinusoïdale épaisse

La conduite de calcul d'optimisation s'effectue alors de la façon suivante :

1°) On se donne V

2°) On se fixe R_e rayon extérieur de l'inducteur

et $\frac{\ell}{R_e}$ ($\frac{\ell}{R_e} \geqslant 2$, pour limiter l'influence des effets d'extrémités)

3°) A l'aide de (2.112) on déduit alors de (2.113), (2.114), (2.115) respectivement;

Ri rayon intérieur de la répartition sectorielle épaisse,

K constante de l'hyperbole dans la répartition hyperbolique,

a l'épaisseur maximale de répartition sinusoïdale épaisse,

en fonction de Re.

4°) Connaissant Ra = Re + e

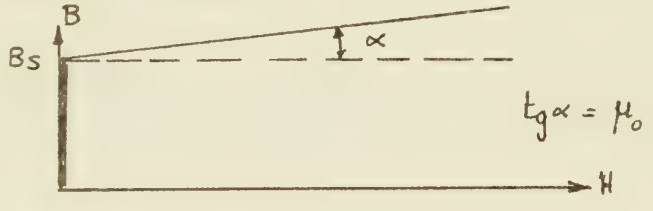
la détermination de l'épaisseur d'induit de rayon extérieur Rt s'effectue en supposant que les pertes joules qui en sont le siège doivent être égales à 0,5 % de la puissance électromagnétique qu'il délivre.

5°) Deux cas se présentent alors :

- ou bien au niveau $r = R_t$ l'induction magnétique maximale est inférieure ou égale à l'induction de saturation B_s du ferromagnétique utilisé pour fabriquer l'écran, et dans ce cas on peut prendre $R_s \simeq R_t$.

- ou bien cette induction est supérieure à l'induction de saturation et la position de la partie intérieure de l'écran de rayon R_s se situera au point r où cette induction devient égale à B_s.

Ceci revient à considérer pour le ferromagnétique une courbe de magnétisme idéalisée représentée sur le schéma ci-dessous



De façon à simplifier cette détermination de R_s on négligera la réaction d'induit, la seule composante à envisager est alors la composante radiale B_r créée par l'inducteur. Cette composante est continue en $r = R_s$ et maximale ($B_r = B_{rm}$) sur les axes polaires La valeur de R_s est donc donnée par la résolution des équations suivantes :

a)

$$B_s = \frac{J}{\pi} \sin \frac{\theta_e}{2} \mu_o \frac{R_e^4}{R_s^3} (1 - x^4) \qquad (2.116)$$

soit $$R_S = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}\cdot \dot{j}\cdot \mu_o \cdot Re^4 \cdot (1-x^4)}{2\pi \quad B_s}} \qquad (2.117)$$

pour la répartition sectorielle épaisse.

avec $\frac{\theta_e}{2} = 60°$

b)

$$B_s = \frac{\dot{j}}{\pi}\mu_o \left(Re^2 a^2 + 4K^2 Lg \frac{2K}{Re^2+Q^2}\right)\frac{1}{R_S^3} \qquad (2.118)$$

soit $$R_S = \sqrt[3]{\frac{\dot{j}\cdot\mu_o\left(Re^2Q^2 + 4K^2 Lg \frac{2K}{Re^2+Q^2}\right)}{\pi \quad B_s}} \qquad (2.119)$$

pour la répartition hyperbolique

c) $$B_s = \frac{8\cdot\dot{j}\cdot a\cdot\mu_o}{315\cdot\sqrt{2}\cdot\pi}\left(105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,a^2 Re - 16\,a^3\right)\frac{1}{R_S^3} \qquad (2.120)$$

soit $$\sqrt[3]{\frac{8\,\dot{j}\cdot a\cdot\mu_o\left(105\,Re^3 - 126\,a\,Re^2 + 72\,a^2\,Re - 16\,a^3\right)}{315\sqrt{2}\cdot\pi\cdot B_S}} \qquad (2.121)$$

pour la répartition sinusoïdale épaisse.

6°) La détermination de R_o (rayon extérieur de l'écran) se fait à l'aide d'une condition sur le flux magnétique. Le flux radial entrant sur un demi-pas polaire se referme tangentiellement au niveau de l'axe interpolaire dans l'épaisseur du ferromagnétique. La condition d'absence de saturation s'écrit alors [cf. fig. (2-28)]

$$R_s B_{rm} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta \, d\theta = (R_o - R_s) B_s \qquad (2.122)$$

Soit

$$R_o = R_s \left(1 + \frac{B_{rm}}{2 B_s} \right) \qquad (2.123)$$

avec dans tous les cas

$$B_{rm} \leq B_s$$

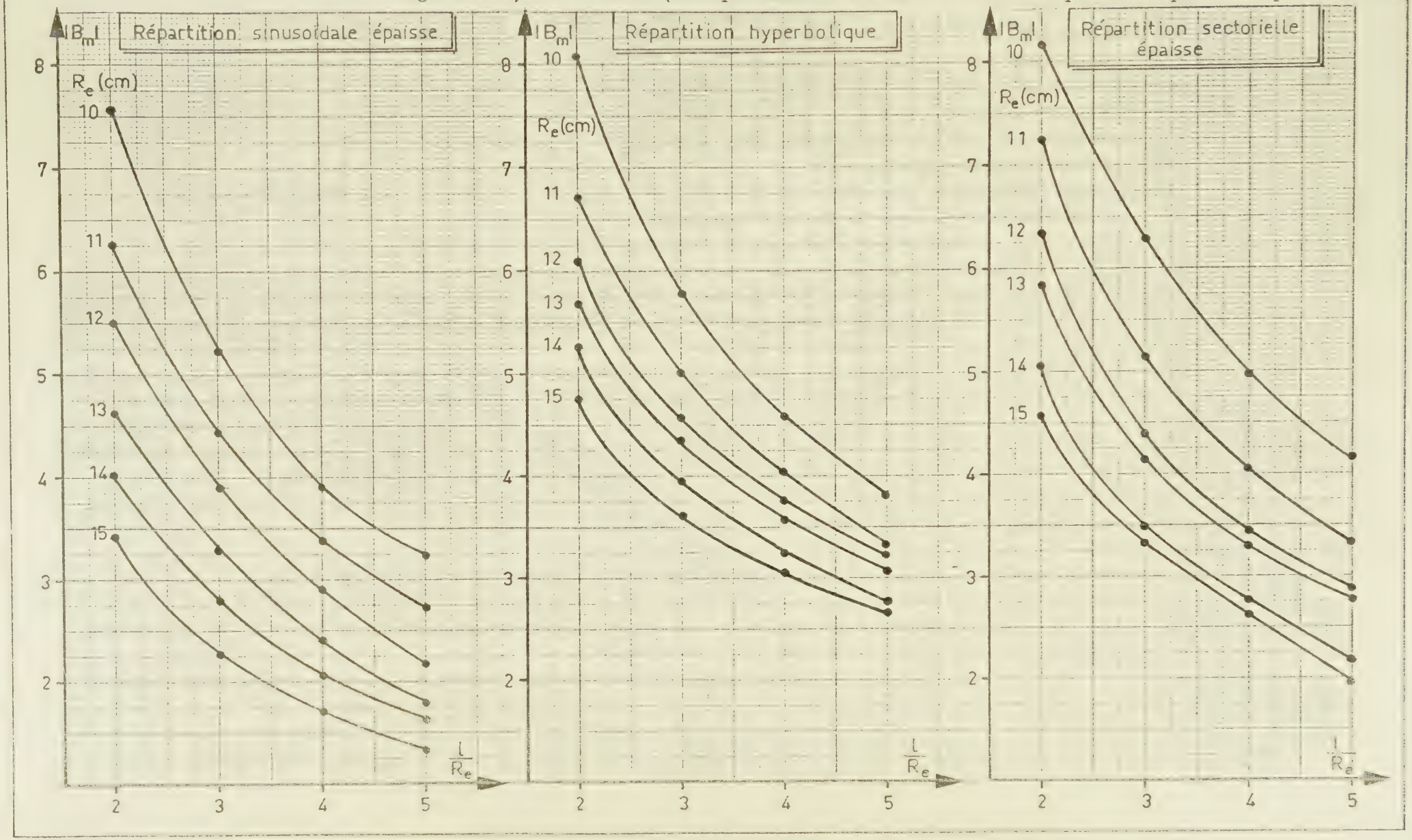
7°) Le volume de la machine est alors donné en première approximation par

$$V = \pi R_o^2 \, l \qquad (2.124)$$

8°) On calcule alors la puissance apparente $\overline{P}$ et la puissance volumique apparente $\overline{P}/V$ en fonction des deux variables indépendantes R_e et $\frac{1}{R_e}$

Pour mener à bien ce calcul on tient compte de la courbe critique du fil en échantillon court qui permet d'ajuster pour chaque quadrupôle, le courant circulant dans le bobinage, à une valeur légèrement intérieure (- 5 %) au courant critique en échantillon court correspondant à l'induction au "point chaud" du bobinage. Le détail du processus de calcul utilisé a été reporté à l'annexe 3. Les résultats du calcul d'optimisation sont reportés sur les figures (2.29) à (2.33).

Figure (2-29) : Variation du maximum du module de l'induction magnétique, en fonction du rapport $1/R_e$, pour trois types de répartition des conducteurs.
Pour ce calcul la valeur de la densité de courant moyenne à été prise égale à $2,8.10^8$ A/m^2 (Indépendamment de la caractéristique critique du supraconducteur)



Légende des figures (2-30) et (2-31)

Pour un volume de supraconducteur donné (1700 m par pôle de fil supraconducteur de 0,78 mm de diamètre), pour des pertes joule données et pour trois types de répartition des conducteurs supraconducteurs dans l'inducteur. Variation de la puissance électromagnétique apparente d'une machine, en fonction du rayon extérieur de son inducteur.

Figure (2-30)

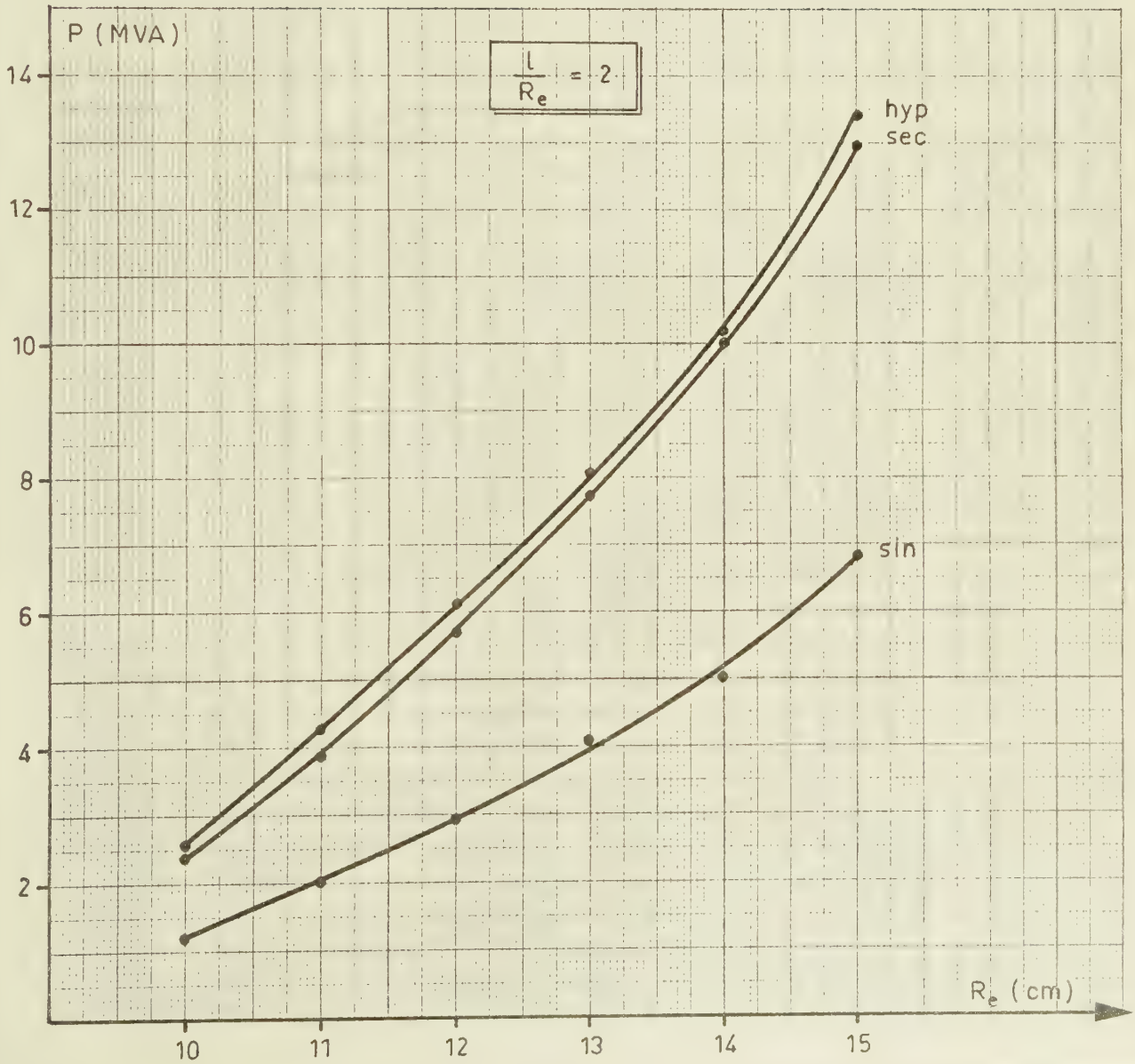
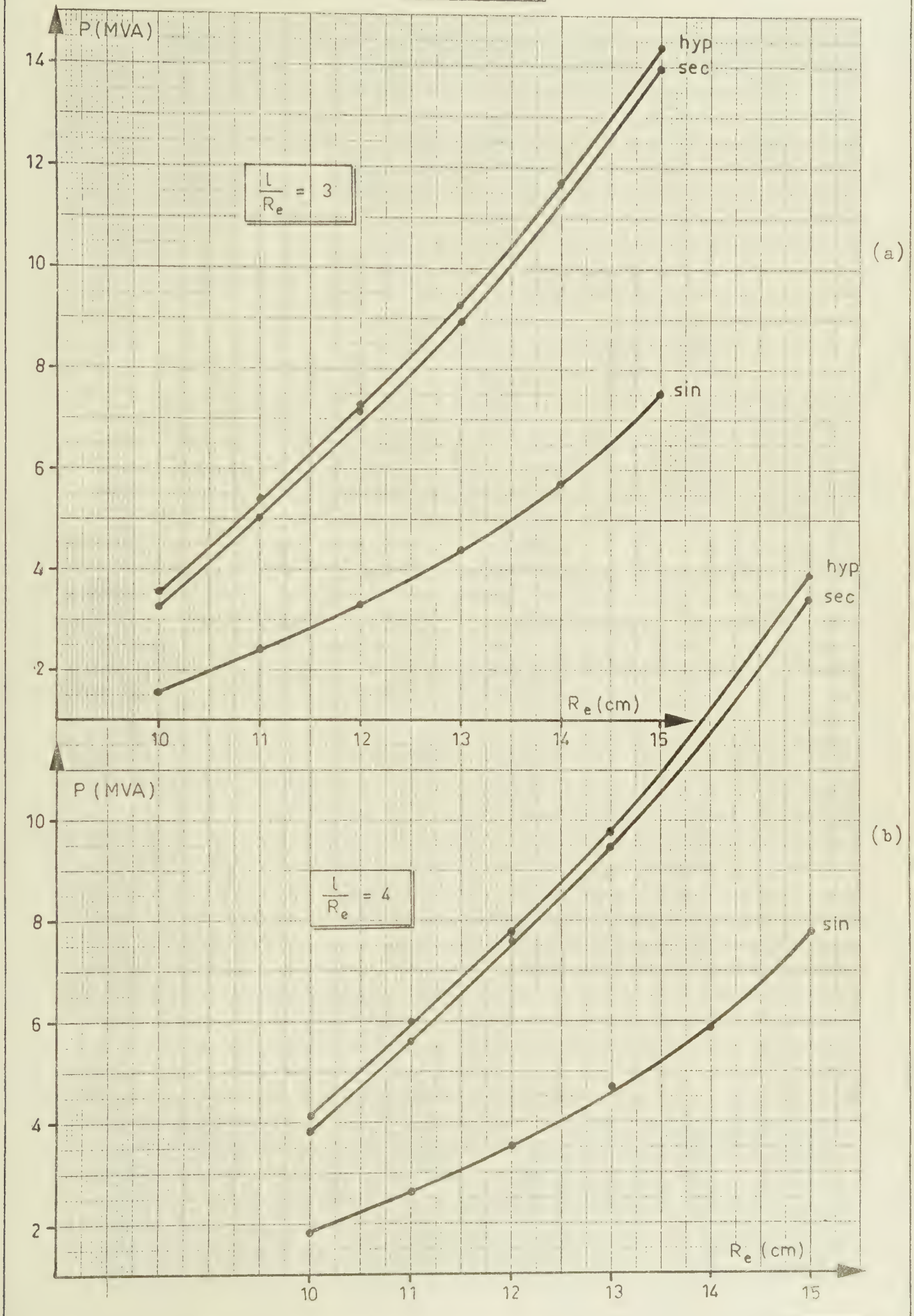


Figure (2-31)


P(MVA)
14
12
10
8
6
4
2
hyp
sec
sin
$\frac{l}{R_e} = 3$
(a)
R_e (cm)
10
11
12
13
14
15
P (MVA)
10
8
6
4
2
hyp
sec
sin
$\frac{l}{R_e} = 4$
(b)
R_e (cm)
10
11
12
13
14
15

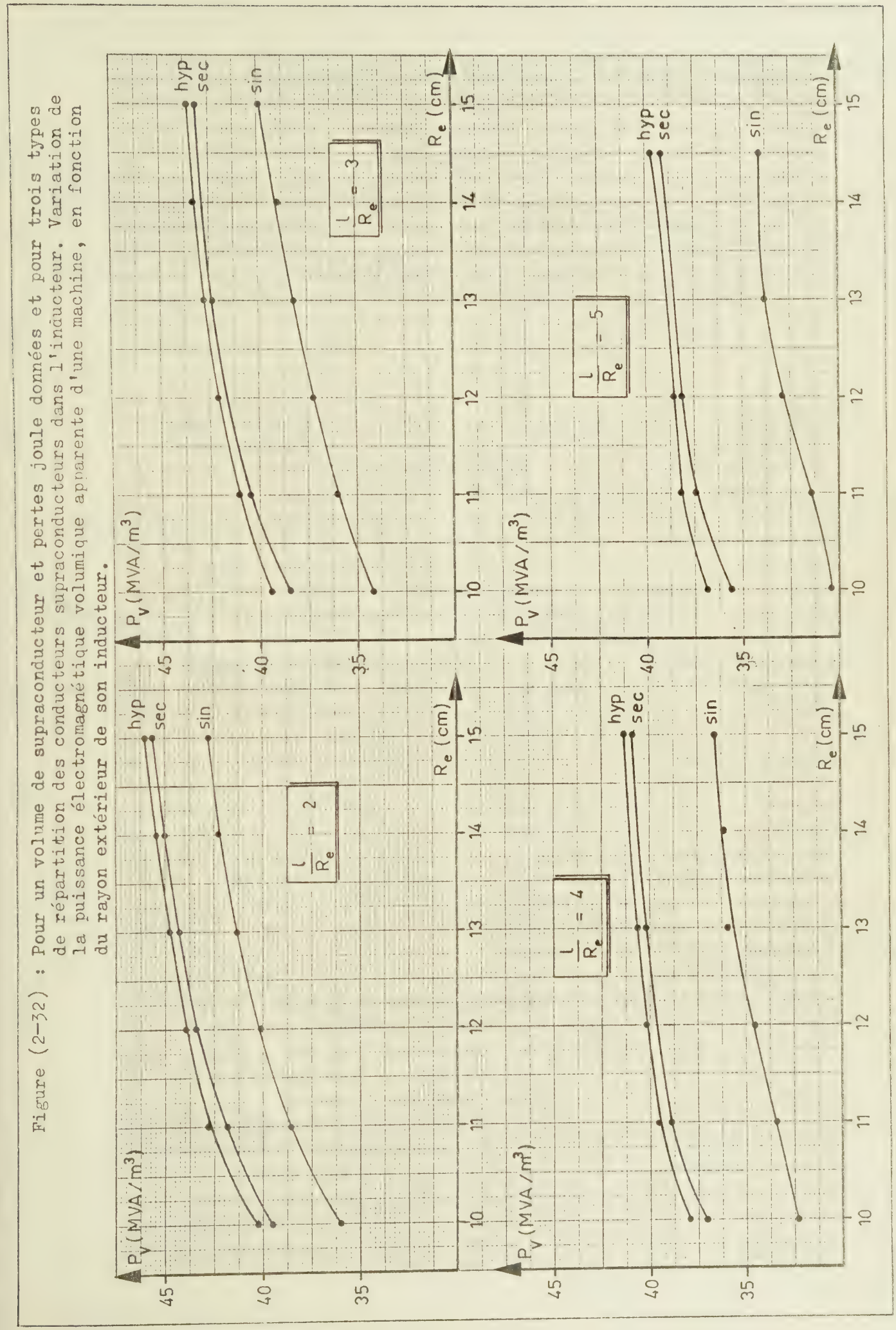
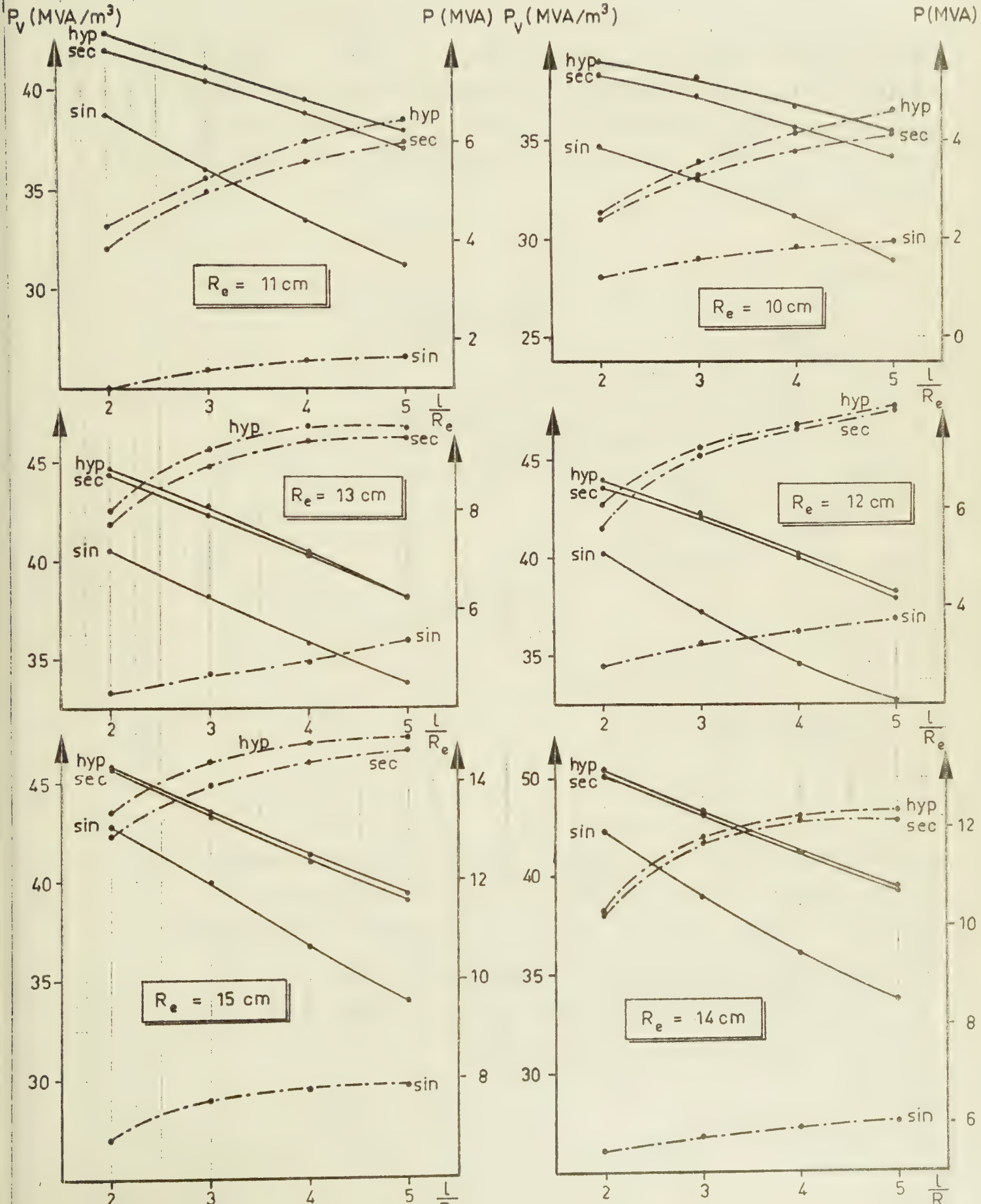


Figure (2-32) : Pour un volume de supraconducteur et pertes joule données et pour trois types de répartition des conducteurs supraconducteurs dans l'inducteur. Variation de la puissance électromagnétique volumique apparente d'une machine, en fonction du rayon extérieur de son inducteur.

Figure (2-33) : Pour un volume de supraconducteur et pertes joule données, et pour trois types de répartition des conducteurs supraconducteurss dans l'inducteur. Variation de la puissance électromagnétique apparente et la puissance électromagnétique volumique apparente d'une machine, en fonction de rapport $1/R_e$ et pour différentes valeurs du rayon extérieur de son inducteur.

P_v ———

P —·—·—



2.7. DIMENSIONNEMENT D'UN INDUCTEUR QUADRUPOLAIRE CYLINDRIQUE A SUPRACONDUCTEUR

2.7.1. Réalisation et essai pratique

Dans un premier temps, nous avons réalisé plusieurs bobines d'essai de façon à acquérir une technique de bobinage satisfaisante. Ces bobines ont été construites sur un mandrin dont la forme est présentée sur la fig. (2.34).

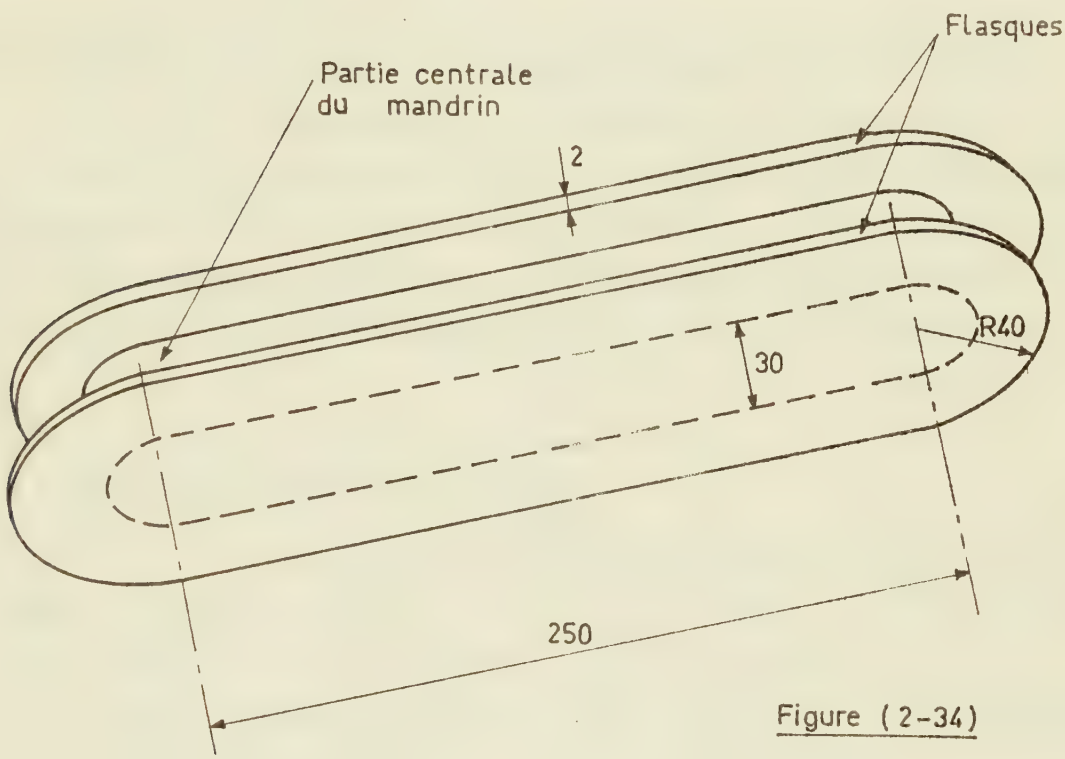


Figure (2-34)

De façon à enrouler le fil autour de son mandrin avec une tension constante nous avons réalisé une machine à bobiner représentée sur la photo (1).

La technique de bobinage est déterminée par les diverses contraintes supportées par l'inducteur :

1°) Contraintes électromagnétiques

On doit limiter la déformation mécanique du bobinage sous l'effet des efforts électromagnétiques, comme pour un bobinage classique. De plus, de façon à favoriser la stabilité magnéto-thermique du fil supraconducteur utilisé, il est indispensable de limiter au maximum les déplacements relatifs des diverses spires lors du fonctionnement du bobinage. L'ensemble de ces conditions ne peut être assuré que grâce à l'utilisation conjointe d'une imprégnation soignée de l'ensemble du bobinage et d'un système de frettes.

2°) Contraintes de dilatation thermique différentielle

Le bobinage doit supporter un nombre élevé de mises en froid. Les cyclages thermiques qui lui sont ainsi imposés nécessitent l'utilisation d'un mandrin et d'un matériau d'imprégnation limitant au maximum les contraintes mécaniques différentielles provoquées par la mise en froid du bobinage.

3°) Refroidissement du bobinage

L'utilisation de câble supraconducteur "stabilisé" impose la mise en place d'un mode de refroidissement efficace. Trois modes de refroidissement sont utilisables :

a- Refroidissement grâce à des canaux par l'intermédiaire desquels l'hélium liquide sera en contact avec le câble supraconducteur. Nous n'avons pas utilisé ce mode de refroidissement, mais le lecteur trouvera des détails dans les références [5], [10] et [11].

b- Refroidissement avec des drains thermiques constitués par des matériaux de bonne conductivité thermique [29]. Ces drains sont disposés entre les couches supraconductrices et assurent les transferts thermiques entre l'hélium liquide et les conducteurs. Ce mode de refroidissement doit être utilisé dans la mesure où le supraconducteur travaille fréquemment en régime variable pendant lequel des pertes importantes pren-

dront naissance dans le supraconducteur (en France au C.E.A. Saclay, on a déjà construit un dipôle et un quadrupôle supraconducteur travaillant en régime pulsé et utilisant ce mode de refroidissement).

Nous avons réalisé une bobine d'essai utilisant des drains thermiques photo (2-a). Le bobinage est réalisé à spires jointives, mises en place à tension constante. Chaque couche est séparée de la suivante par un drain thermique (ruban de cuivre 3/100 mm) disposés entre deux couches d'isolants.

L'utilisation de ces drains thermiques particuliers n'autorise pas une imprégnation extérieure globale et conduit à encoller séparemment chaque couche de conducteur de bobinage. Nous n'avons pas retenu cette technique du fait du temps d'exécution très longs qu'elle nécessite.

Dans le cas où le bobinage est constitué par l'empilement de plusieurs bobines (ce qui est notre cas) il faut usiner les flasques de ces bobines de manière à ce que les drains thermiques soient en contact avec l'hélium liquide Fig. (2.35).

c- Refroidissement du bobinage sans l'intermédiaire de drains thermiques

Le mode de refroidissement le plus simple consiste à plonger tout simplement le bobinage dans l'hélium liquide. Mais cette méthode n'est utilisable que dans le cas où les bobines ne sont pas trop épaisses. Un tel mode de refroidissement simplifie considérablement la technique de réalisation du bobinage, car il suffit alors d'imprégner l'ensemble une fois celui-ci terminé.

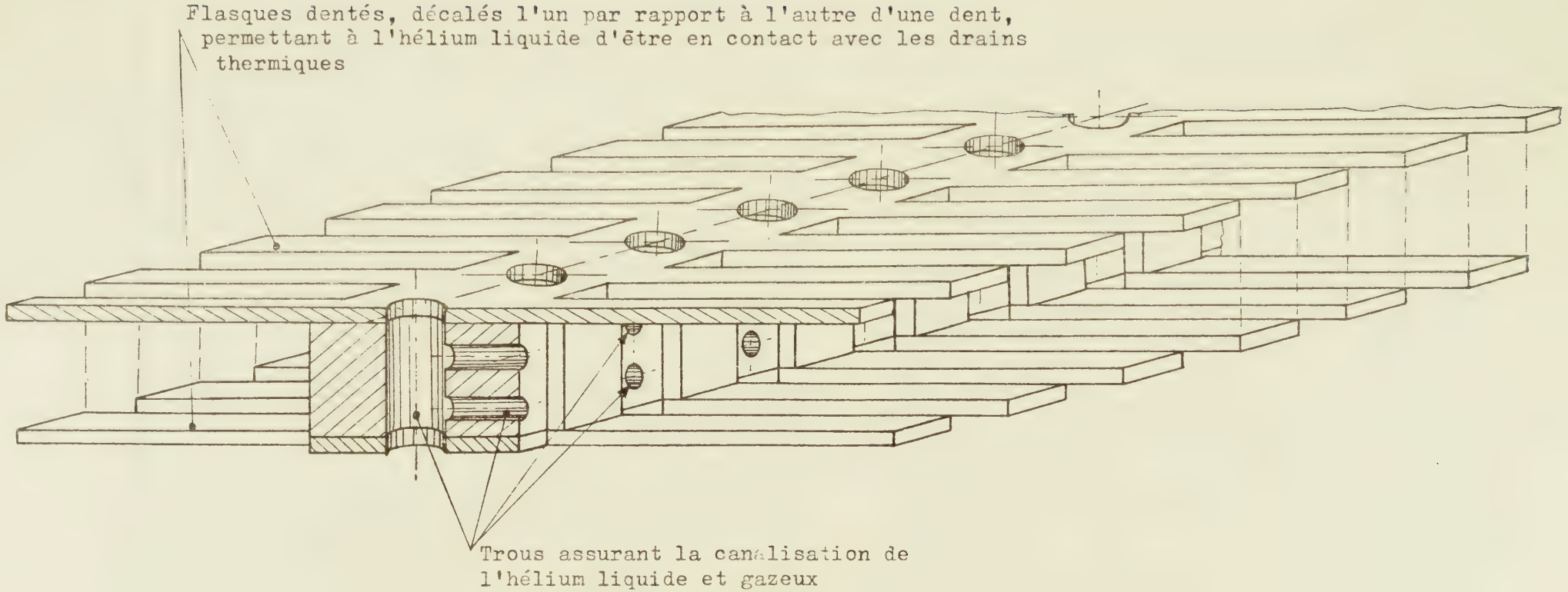


Figure (2-35) : Forme du mandrin d'une bobine destinée à être refroidi avec des drains thermiques.

Il faut s'assurer de la compatibilité des isolants utilisés entre les couches de supraconducteurs avec l'imprégnation. Pour cela nous avons réalisé différentes bobines d'essai Photo (2) et Photo (3) utilisant soit du papier, soit du ruban de tissu de verre. Ces bobinages ont été imprégnés avec de la résine epoxy sous vide et pression, ensuite ont été cyclés un grand nombre de fois entre la température ambiante et celle de l'azote liquide. Une coupe a ensuite été réalisée par un plan perpendiculaire et un autre parallèle à l'axe photo (4) de façon à pouvoir observer le comportement de l'ensemble de la structure aux cyclages thermiques. L'utilisation du tissu de verre à conduit aux mailleurs résultats, principalement parce qu'il permet une imprégnation plus complète grâce à son structure perméable à la résine époxy.

Il est évident que dans la mesure du possible un mandrin en matériau isolant (verre époxy par exemple) sera préférable à un mandrin en acier inoxydable, surtout si le bobinage correspondant est soumis à des régimes variables. Ce mandrin doit présenter un coefficient de dilatation aussi proche que possible de celui des conducteurs supraconducteurs plutôt que de celui du matériau d'imprégnation.

Les matériaux "verre-époxy" semblent être particulièrement bien adaptés à l'ensemble des problèmes posés par la réalisation d'un multipôle supraconducteur étant donnés leurs propriétés mécaniques particulières [28] . Ces matériaux présentent l'avantage d'être facilement usinables et ainsi de pouvoir être collés et imprégnés avec de la résine époxy...

Nous avons construit deux bobines d'essai dont le mandrin est fabriqué en verre-époxy "SILECTO EG-10"

Photo (2 - b,c). Les deux flasques de chaque mandrin sont collés contre la partie centrale avec de l'araldite D CY 230 et le durcisseur HY 951, la bobine ne comporte ainsi aucune autre partie métallique que les conducteurs.

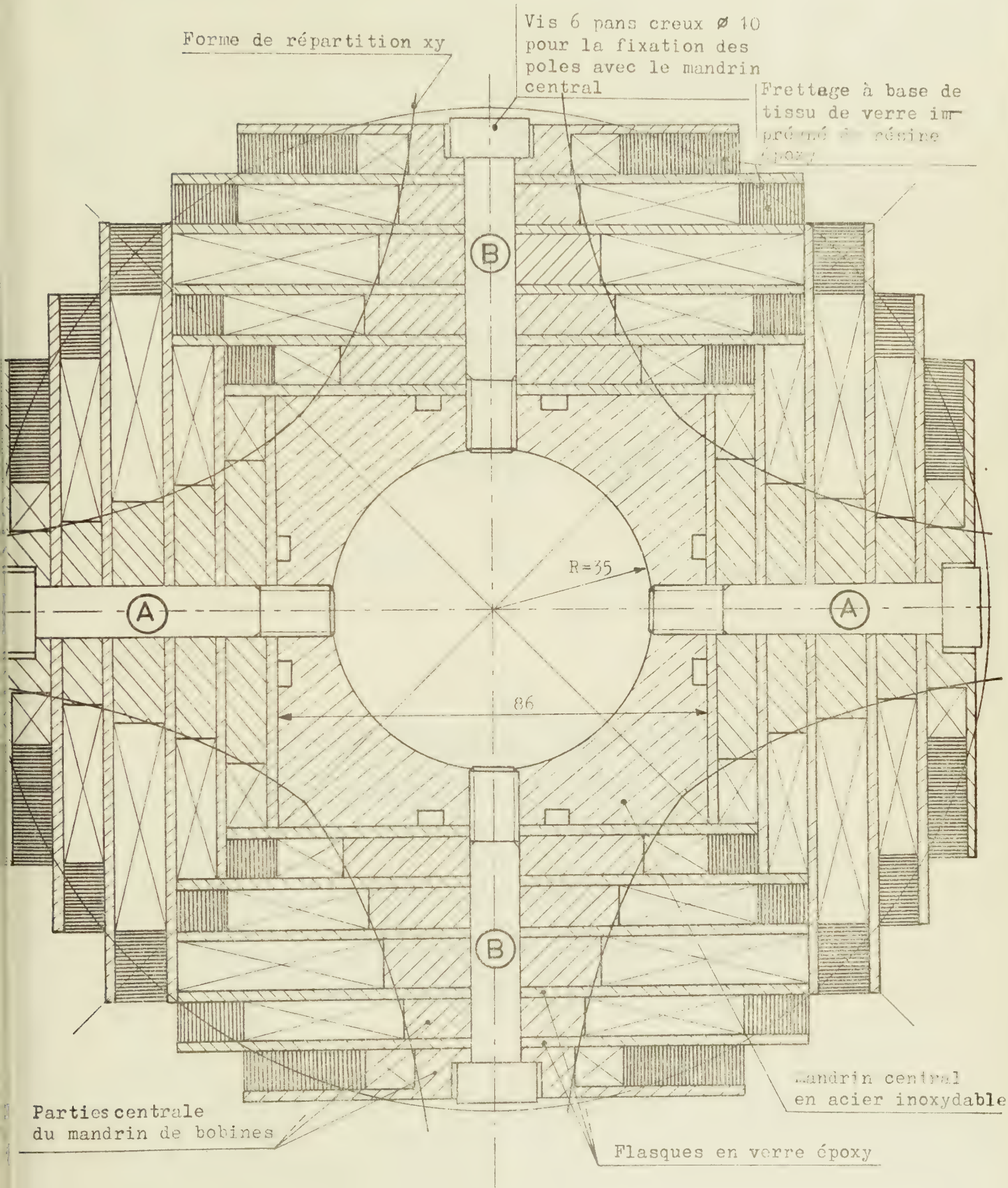
2,7.2. Etude d'un inducteur quadrupolaire cylindrique supraconducteur

Après avoir effectué les essais précédents, nous avons étudié la faisabilité d'un inducteur quadrupolaire cylindrique supraconducteur présentant les caractéristiques suivantes:

- Le diamètre de l'inducteur est égal à 20 cm
- Sa longueur "efficace" est de 40 cm
- La longueur axiale "hors tout" comprenant les têtes de bobines étant de 50 cm
- La forme de répartition choisie pour les conducteurs supraconducteurs dans un plan de section droit est une forme hyperbolique (cf. Fig. 2-36)
- Deux formes de pôle sont réalisées.
  la forme "A" et la forme "B" (cf. Fig. (2-37 a,b)
- Chacun des pôles est constitué par l'empilement de cinq bobines réalisées séparément. Les bobines 3, 4, 5 de la forme "A" et 1, 2, 4, 5 de la forme "B" sont frettées séparément à l'aide d'un ruban en tissu de verre imprégné avec des résines époxy Fig. (2-38 a,b)
- Fig. (2-39) présente le mandrin Central en acier inoxydable. Sur les quatre côtés extérieurs des rainures longitudinales et transversales ont été pratiquées de façon à canaliser l'hélium liquide et gazeux et en assurer la circulation
- Les quatre pôles sont assemblés sur le mandrin central fixés contre ceci et collés l'un contre l'autre avec de la résine epoxy. Ensuite l'ensemble est usiné de manière à avoir une surface extérieure cylindrique (cf. Fig. 2-40).

- L'ensemble du quadrupôle reçoit alors un deuxième système de frettage qui consiste à enrubanner extérieurement le bobinage puis à imprégner une nouvelle fois l'ensemble à l'araldite en prenant soin de ne pas obturer le système de Canaux de circulation d'hélium Fig. (2-41).

Figure (2-36) : Section droite de l'inducteur après assemblage des poles et avant usinage



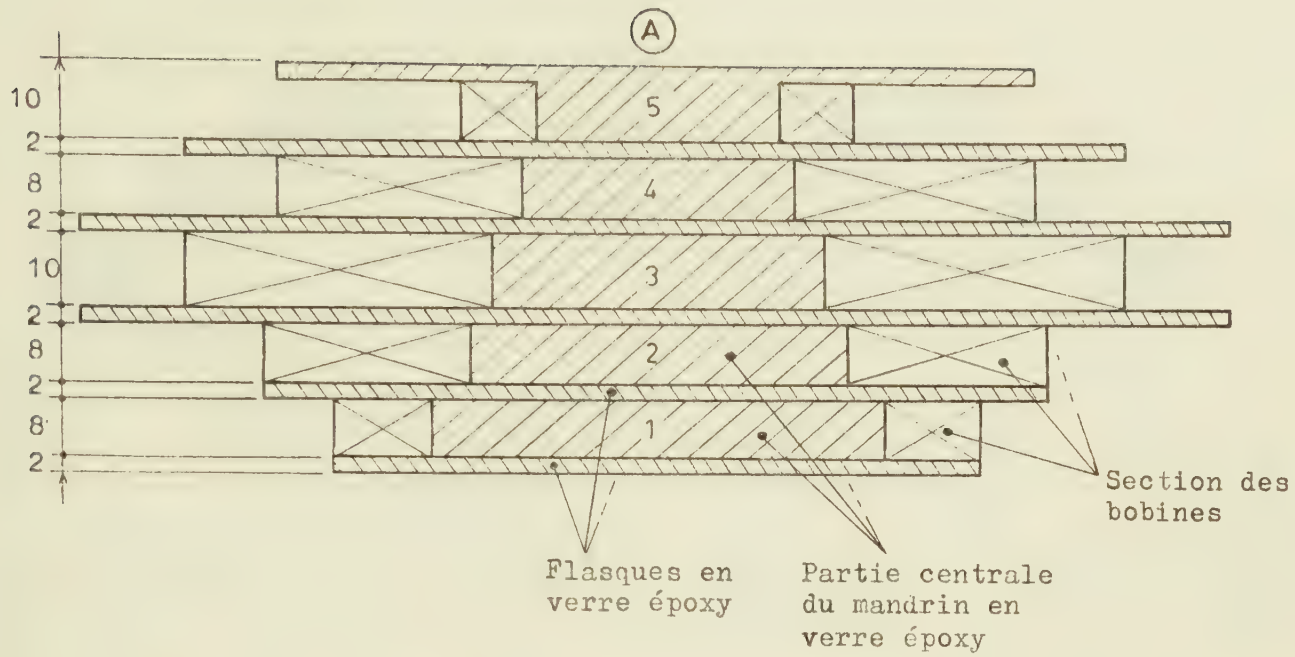


Figure (2-37a) : Coupe dans un pôle de forme A (bobines sans frêtte)

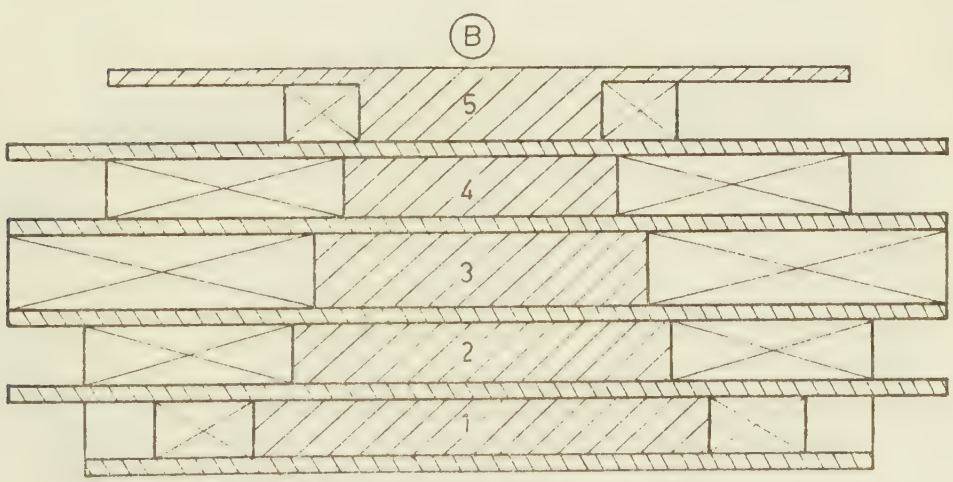


Figure (2-37b) Coupe dans un pôle de forme B (bobines sans frêtte)

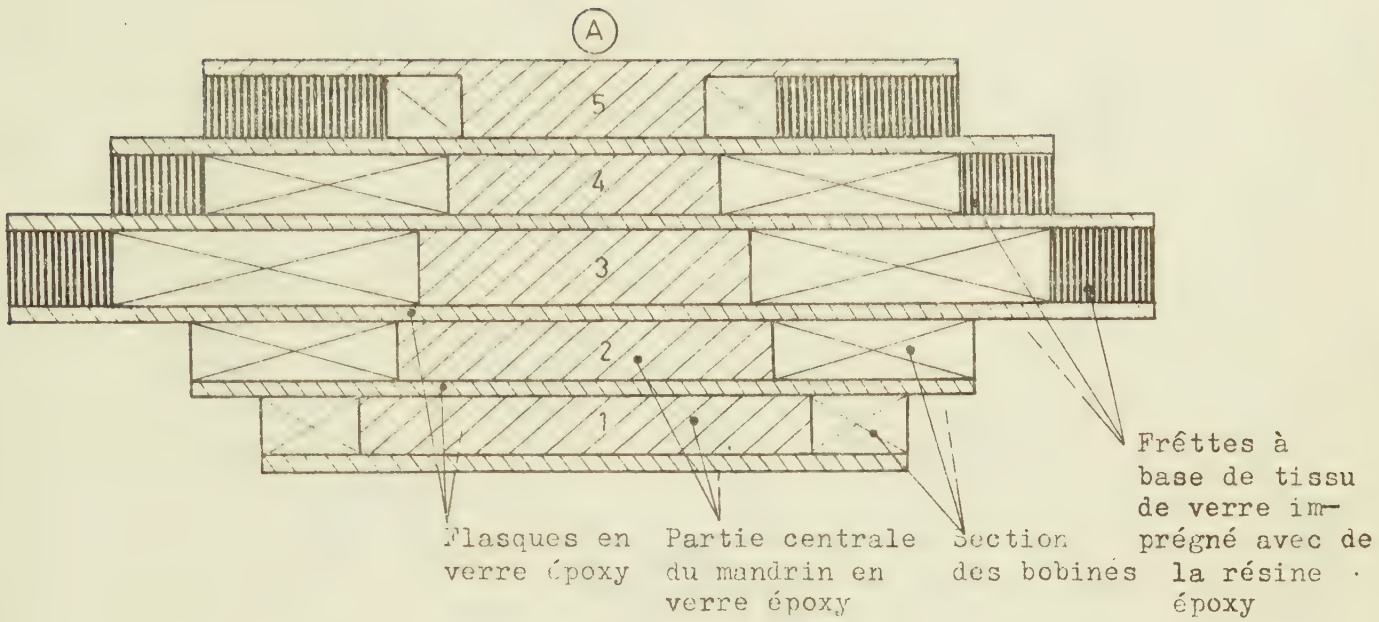


Figure (2-38a) : Coupe d'un pôle de la forme A des bobines avec frêtte

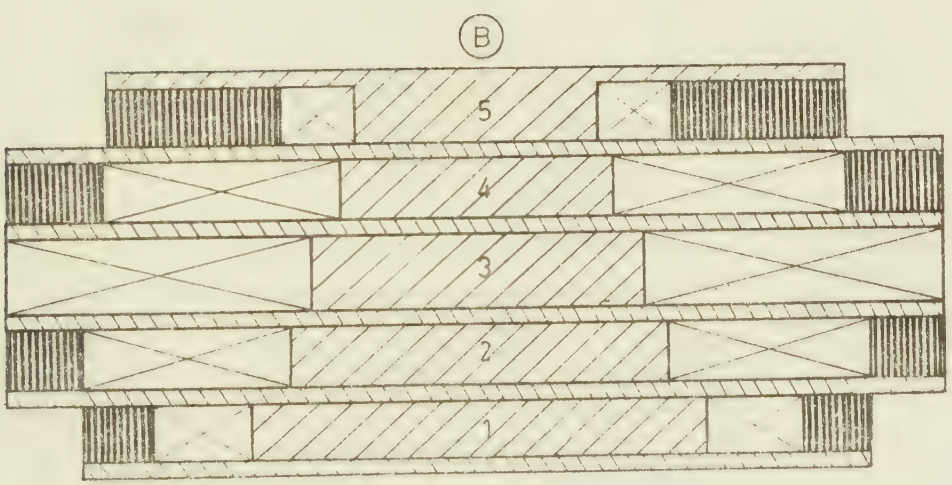


Figure (2-38b) : Coupe d'un pôle de la forme B des bobines avec frêtte

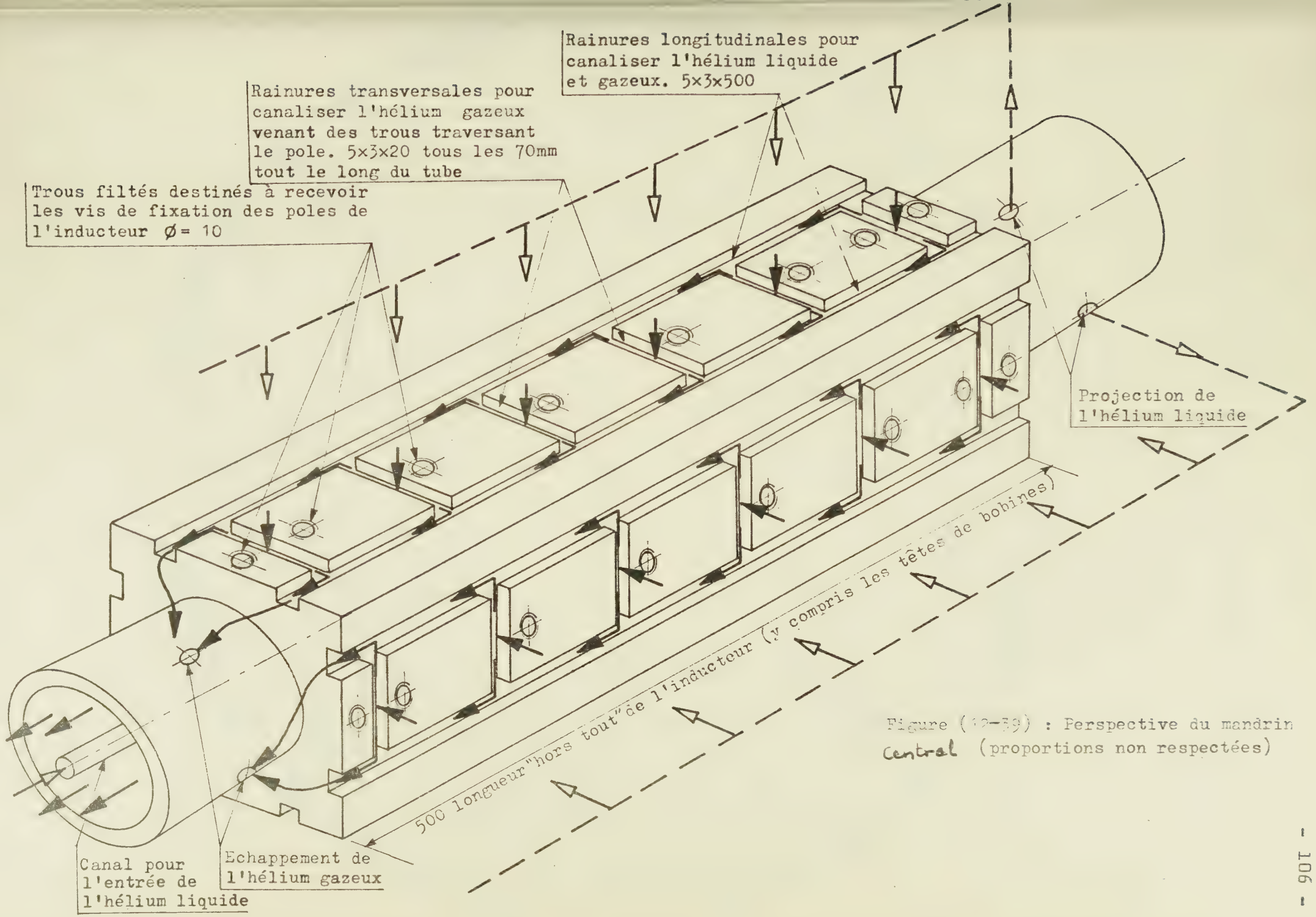
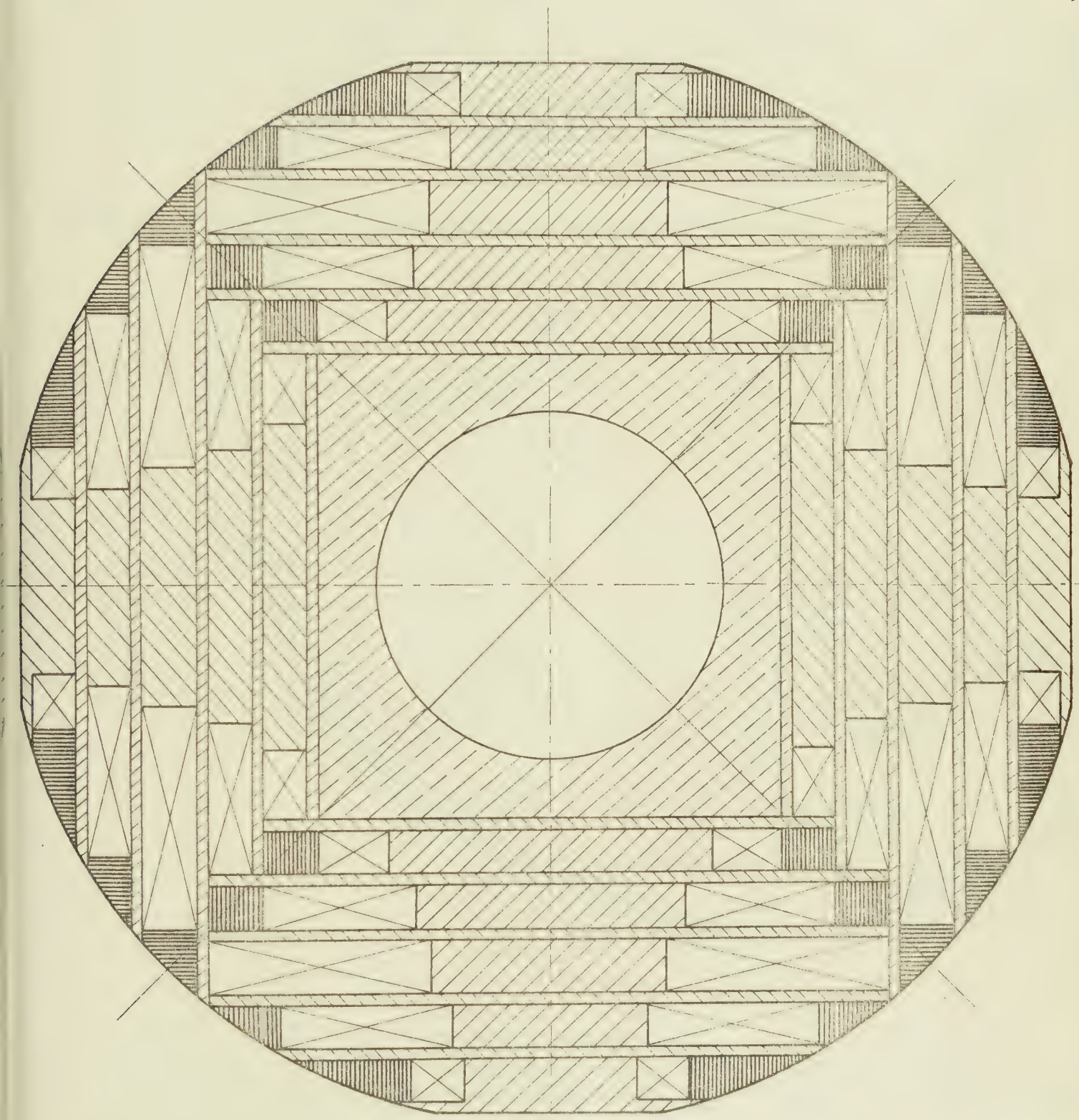


Figure (10-39) : Perspective du mandrin central (proportions non respectées)

Figure (2-40) : Section droite de l'inducteur après l'usinage et avant le frettage



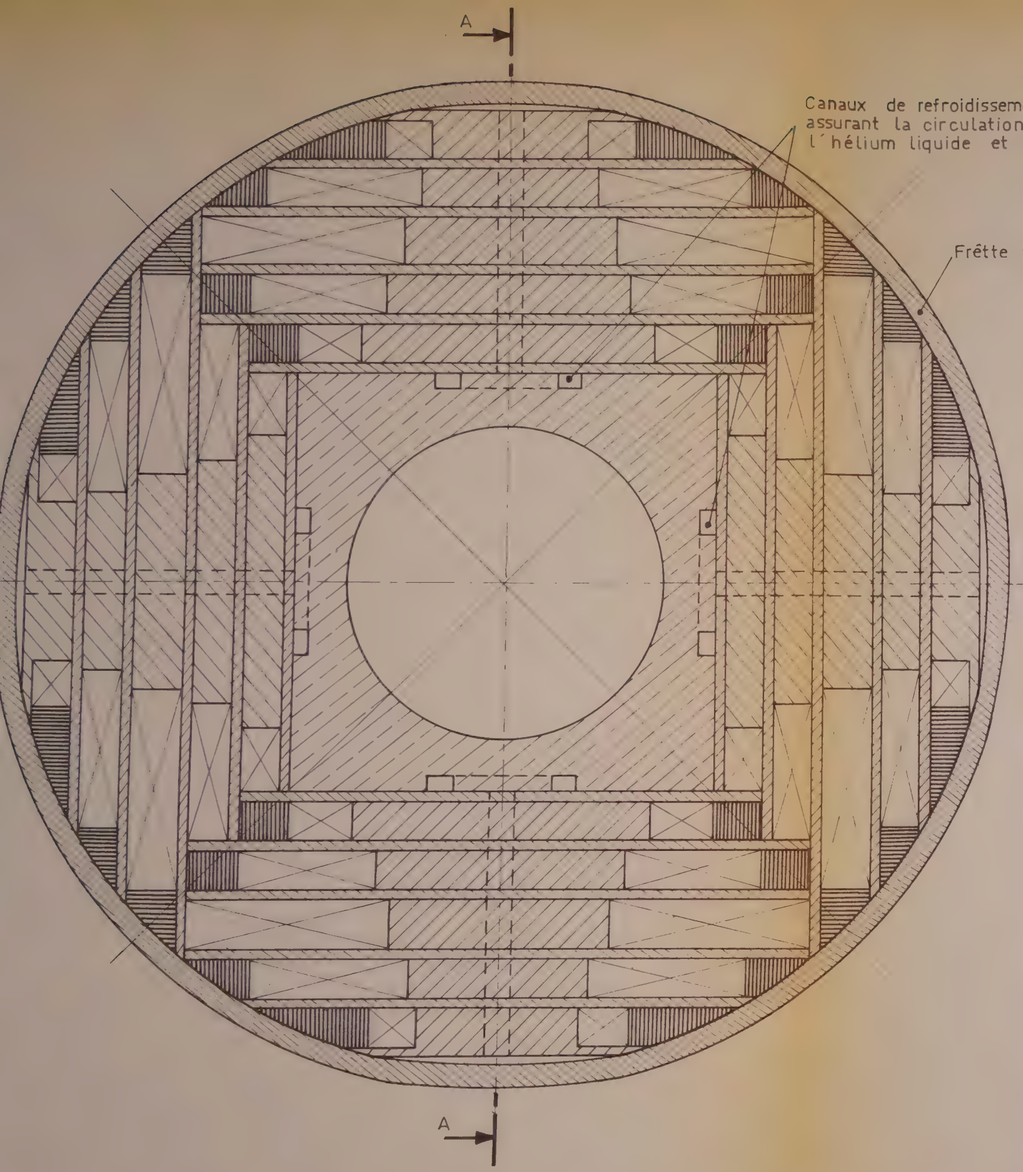


Figure (2-41a) : Section droite de L'inducteur
après usinage et frettage

Figure (2 - 41b) : 1/2 Coupe A-A

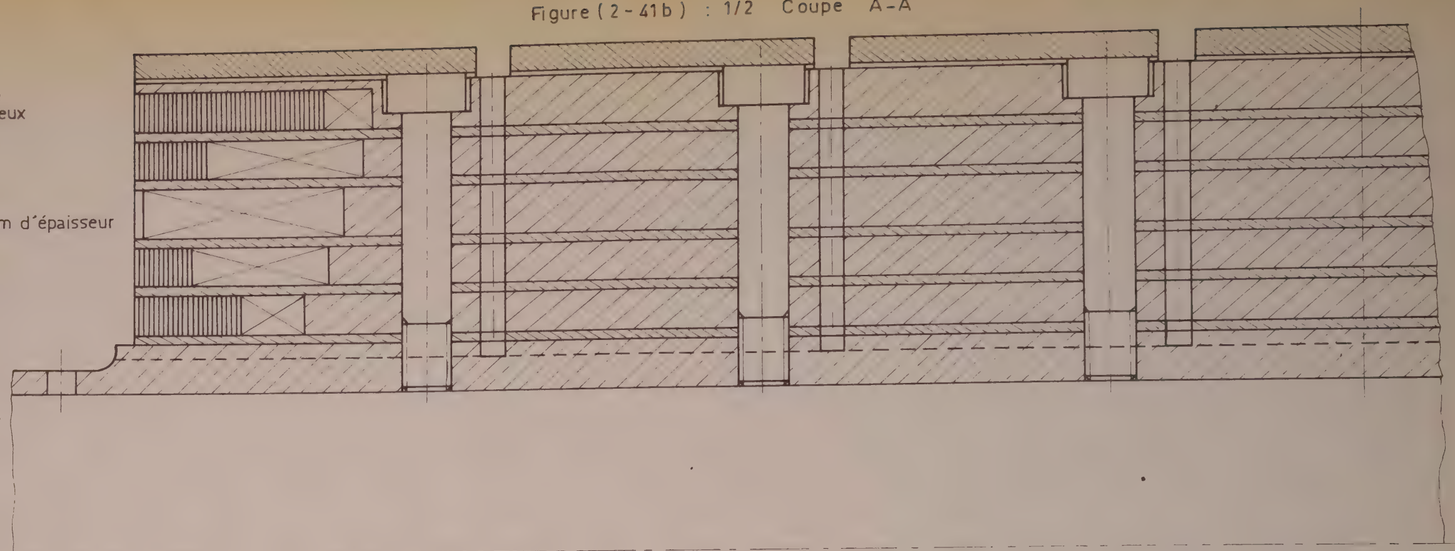
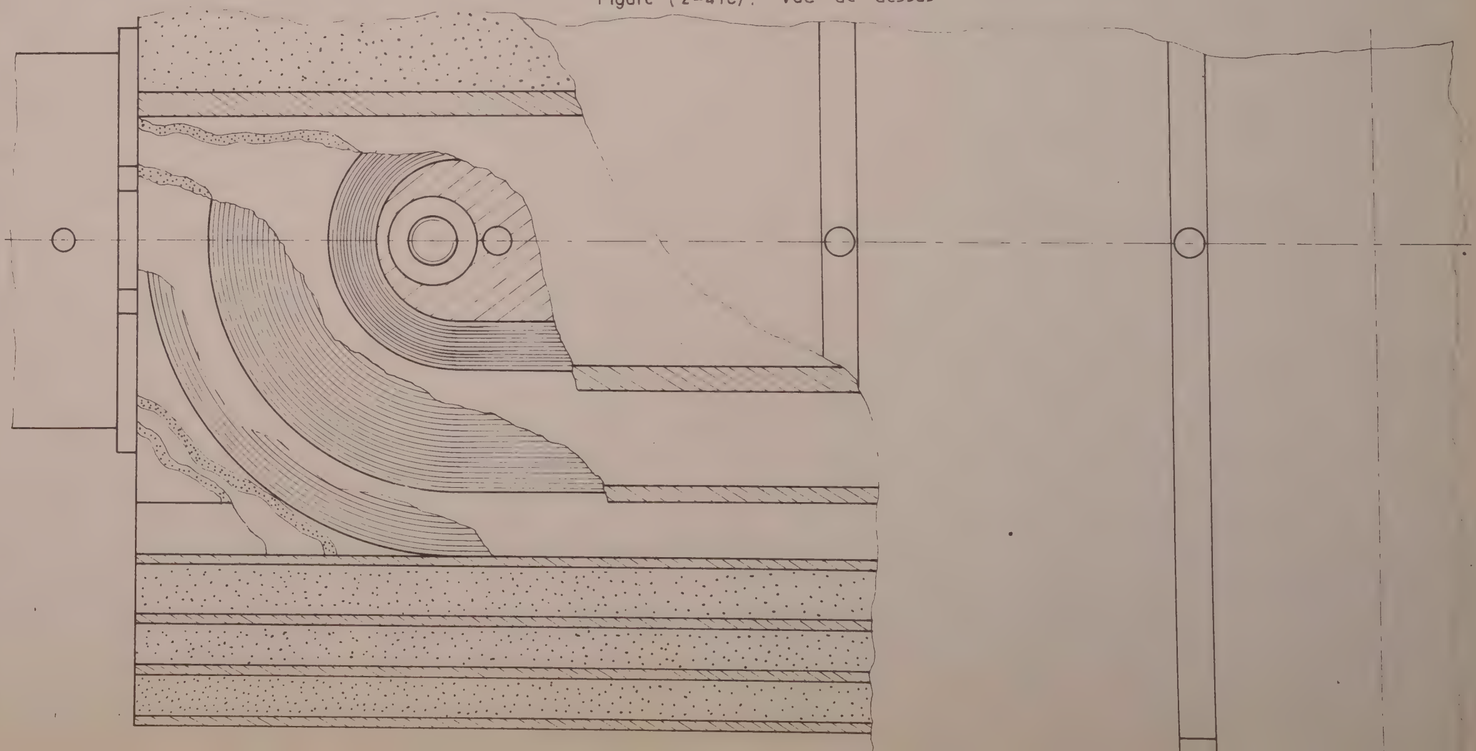


Figure (2-41c) : Vue de dessus



C H A P I T R E 3

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

CALCUL, REALISATION PRATIQUE, ET ESSAI STATIQUE D'UN INDUCTEUR PLAT SUPRACONDUCTEUR D'UNE MACHINE ELECTRIQUE A TROIS ENROULEMENT

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

3.1. INTRODUCTION

Le quadrupôle supraconducteur cylindrique étudié précédemment n'a pas été réalisé, car une orientation nouvelle de recherches au L.G.E.P. nous a progressivement conduit à nous intéresser aux machines supraconductrices "plates" à trois enroulements (Brevet BOYER, ANVAR n° 7419671). Ces machines présentent en effet, un grand intérêt pour la propulsion navale, par exemple, car elles peuvent admettre un grand nombre de pôles et donc des vitesses de rotation lentes (200 à 300 t mn^{-1}).

Nous avons apporté une contribution à l'étude de ce type de machine en réalisant un inducteur "plat" à 20 pôles dont l'étude théorique et expérimentale fait l'objet de ce chapitre. Parmi les deux morphologies possibles pour l'inducteur, nous avons retenu dans le cas présent celle qui consiste à disposer les bobinages constituant les pôles de l'inducteur dans un plan perpendiculaire à l'axe Fig. (3.1.b).

3.2. CALCUL DE L'INDUCTEUR

3.2.1. Caractéristiques principales

Nous nous sommes donnés, pour le calcul et la réalisation de cet inducteur les paramètres suivants :

- vitesse de rotation de l'inducteur : 300 t min^{-1} ($N = 5\,t.S^{-1}$)
- Fréquence de courant dans l'induit f = 50 Hz

soit un nombre de paires de pôles

$$P = \frac{f}{N} = 10 \qquad (3.1)$$

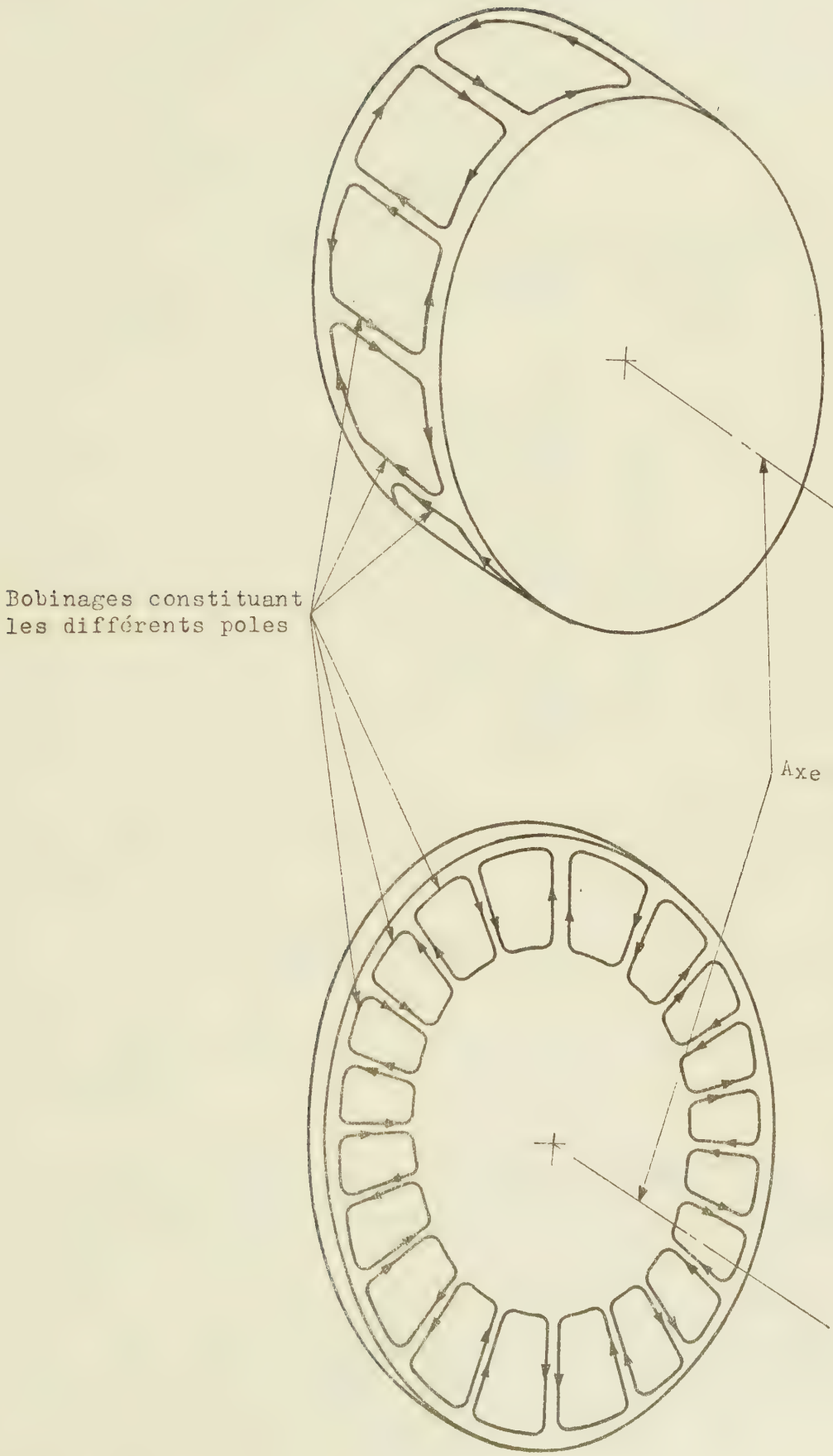


Figure (3-1a)

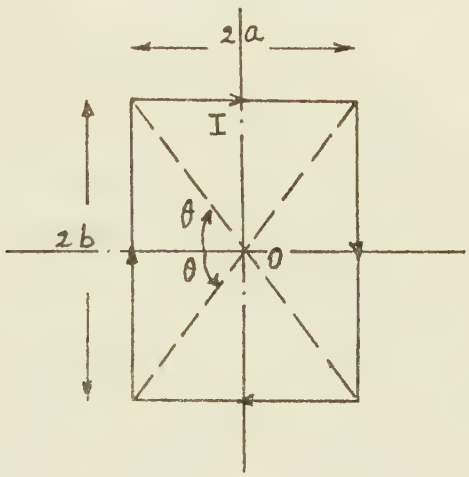
Figure (3-1b)

- L'angle géométrique par pôle est alors

$$\theta = 18° \qquad (3.2)$$

3.2.2. Dimensionnement sommaire

Supposons que chaque bobine élémentaire constituant un pôle de l'inducteur soit réduite à une spire rectangulaire de dimension 2a x 2b parcourue par un courant I Fig. (3.2).



Le champ magnétique produit au point 0 par cette spire a pour expression :

$$H = \frac{I}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{a} + \frac{\cos\theta}{b}\right) = \frac{I}{ab\pi}\left(b \sin\theta + a \cos\theta\right) \qquad (3.3)$$

En supposant que la spire considérée ci-dessus a une longueur constante

$$a + b = K \qquad (3.4)$$

Nous pouvons déterminer le rapport a/b pour que le champ magnétique produit par cette spire au point 0 soit maximum. Soit avec

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (3.5)$$

$$H = \frac{I}{\pi} \left(\frac{\sqrt{K^2 - 2Kb + 2b^2}}{b(K - b)} \right)$$

la condition

$$\frac{\partial H}{\partial b} = 0$$

conduisant à

$$(2b - K)\ (b^2 + K^2 - 6K) = 0$$

soit

$$a = b = \frac{K}{2} \qquad (3.6)$$

résultat qui correspond à une spire carrée. La forme carrée est évidemment irréalisable en pratique du fait de la présence d'angles vifs préjudiciables aux performances du câble supraconducteur utilisé, ainsi que de la présence des segments rectilignes le long desquels le fil peut prendre une flèche importante. La forme retenue pour la bobine élémentaire constituent un pôle de l'inducteur est représentée sur la figure (3.3) : elle est donc voisine de la forme circulaire.

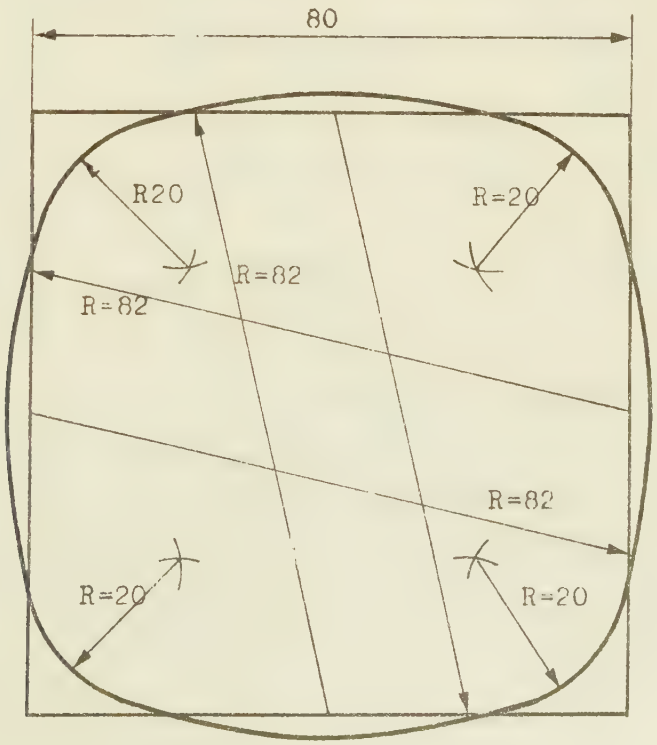


Figure (3.3)

Dans le cadre de ce calcul de prédimensionnement sommaire, il est possible d'obtenir des résultats donnant un ordre de grandeur convenable sans avoir recours à des calculs complexes de champ magnétique à trois dimensions. En assimilant le bobinage à une spire circulaire portant une certaine quantité d'ampères-tours $I = ni$, la valeur de l'induction sur l'axe de la spire de rayon a, à une distance x du plan de celle-ci (Cf. Fig. 3.4) est donnée par :

$$\left| \vec{B} \right| = \mu_o \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \qquad (3.7)$$

Cette valeur passera par un maximum $\left|\vec{B}\right|_{max}$ pour I et x donnés en fonction de a pour

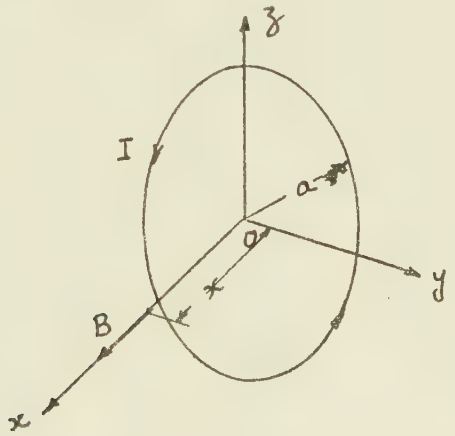


Figure (3.4)

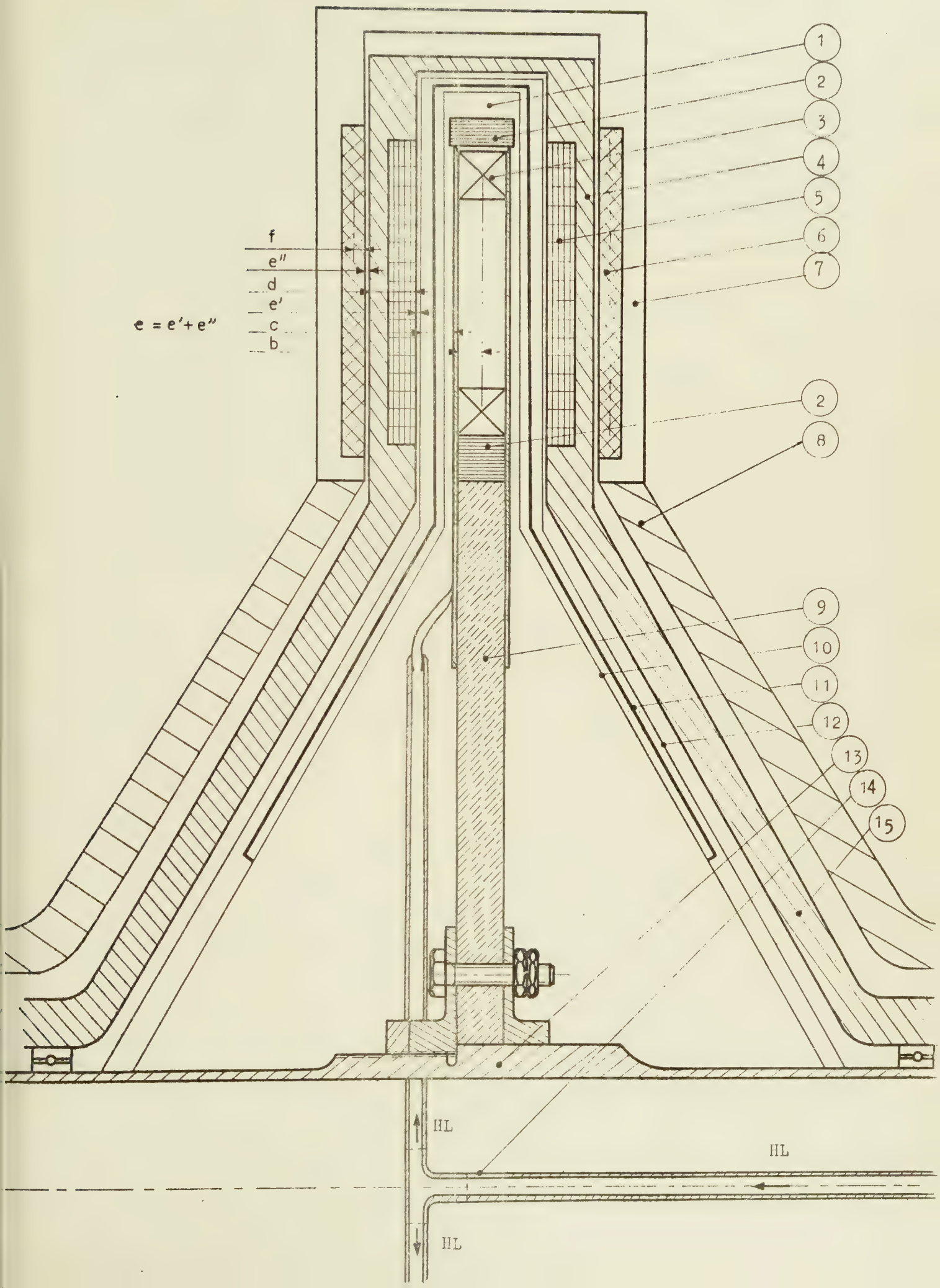
$$\frac{\partial B}{\partial a} = 0 \qquad \text{soit} \qquad a = x\sqrt{2} \qquad (3.8)$$

$$\text{et} \quad \left| \vec{B} \right|_{max} = \mu_o \frac{I\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} a \qquad (3.9)$$

La longueur x considérée correspond à la distance moyenne séparant l'induit de l'inducteur. Dans la maquette de machine à trois enroulements en cours de réalisation au LGEP. Cette distance x correspond donc à la somme : cf Fig.(3.5)

- de la demi-épaisseur b (dans le sens axial) d'une bobine inductrice

Figure (3-5)



- Figure (3-5) -

1 - Réserve d'hélium liquide (tenue en place par la force centrifuge)
2 - Frette de l'inducteur
3 - Bobinage supraconducteur (inducteur)
4 - Flasque support du bobinage auxiliaire
5 - Bobinage auxiliaire
6 - Bobinage du stator (induit)
7 - Carcasse du stator (écrain ferromagnétique)
8 - Bâti de la machine
9 - Disque Central portant les bobines inductrices
10 - Paroi intérieure du cryostat
11 - Ecrain thermique du cryostat
12 - Parois extérieure du cryostat
13 - Axe de l'inducteur
14 - Alimentation en hélium liquide
15 - Axe support du bobinage auxiliaire

- de l'espace cryogénique c entre l'inducteur et la paroi externe du cryostat
- de l'épaisseur d de l'enroulement auxiliaire
- du jeu axial e permettant la rotation de l'auxiliaire
- de la demi-épaisseur (axiale) f des bobinages d'induit.

Nous avons pris

$$x = b + c + d + e + f = 36 \text{ mm}$$
$$b = 10 \text{ mm}$$

soit

$$a = x \sqrt{2} \simeq 50 \text{ mm}$$

Connaissant a et b, on peut déterminer le rayon extérieur R_e de l'inducteur : (cf. Fig. (3.6)

$$R_e = R_{may} + a + b$$

avec

$$OO_1 = OO_2 = R_{moy} = \frac{O\,T}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{a + b}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{a + b}{\sin \frac{\pi}{20}}$$

soit $R_e = 44{,}3$ cm (3.10)

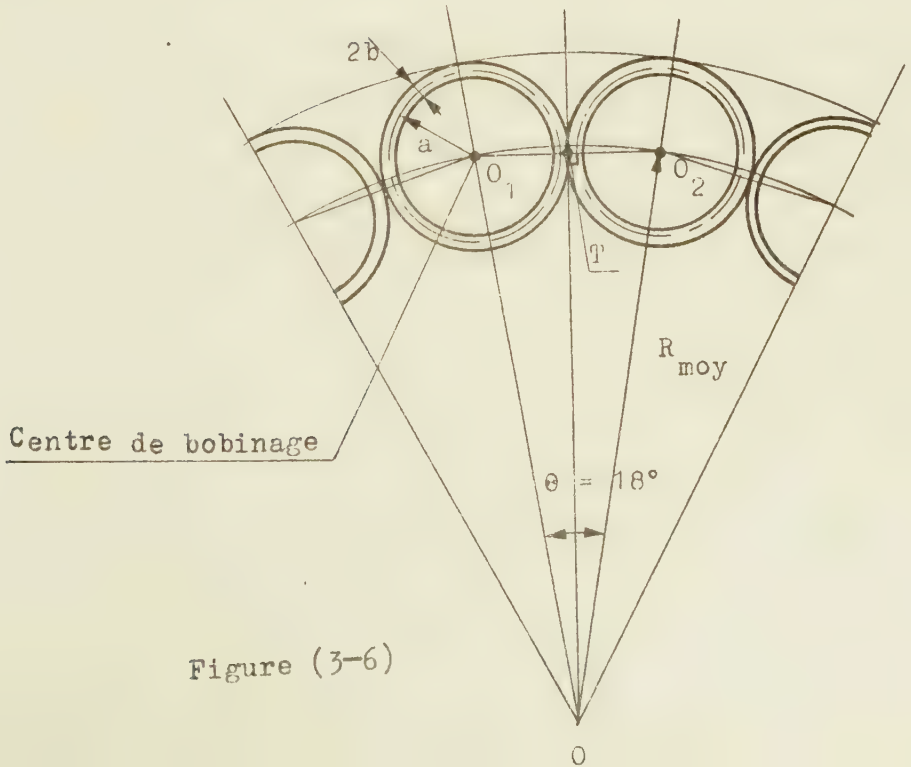


Figure (3-6)

En résumé : les caractéristiques principales de l'inducteur sont les suivantes :

- Nombre de pôles = 20 pôles
- Angle géométrique par pôle : 18 °
- Section droite d'une bobine inductrice : 20 x 20 mm
- Rayon moyen d'une bobine a = 50 mm
- Rayon extérieur de l'inducteur = 443 mm.

De manière à conserver la présence de parties quasi rectilignes dans les différents bobinages constituant l'inducteur, la morphologie finale retenue est celle de la fig. (3.3). (On peut en effet considérer que dans le cas de bobines inductrices circulaires la "longueur effective" dans le sens radial de l'induit est annulée et que seuls subsistent les effets d'extrémités).

3.2.2. Expérimentations diverses préliminaires à la construction de l'inducteur

Nous avons tout d'abord réalisé une bobine d'essai en cuivre dont le mandrin est représenté sur la figure (3.7) comportant 550 spires de fil ayant un diamètre de 0,8 mm identique à celui du fil supraconducteur utilisé par la suite. Nous avons pu ainsi :

a - faire la mesure de l'induction magnétique produite par cette bobine dans un plan médian perpendiculaire à l'axe de l'inducteur, au niveau de conducteurs (Pts 1, 2, 3, 4, 5, 6 de la Fig. 3.7). Les résultats de mesure sont reportés dans le tableau (3.2).

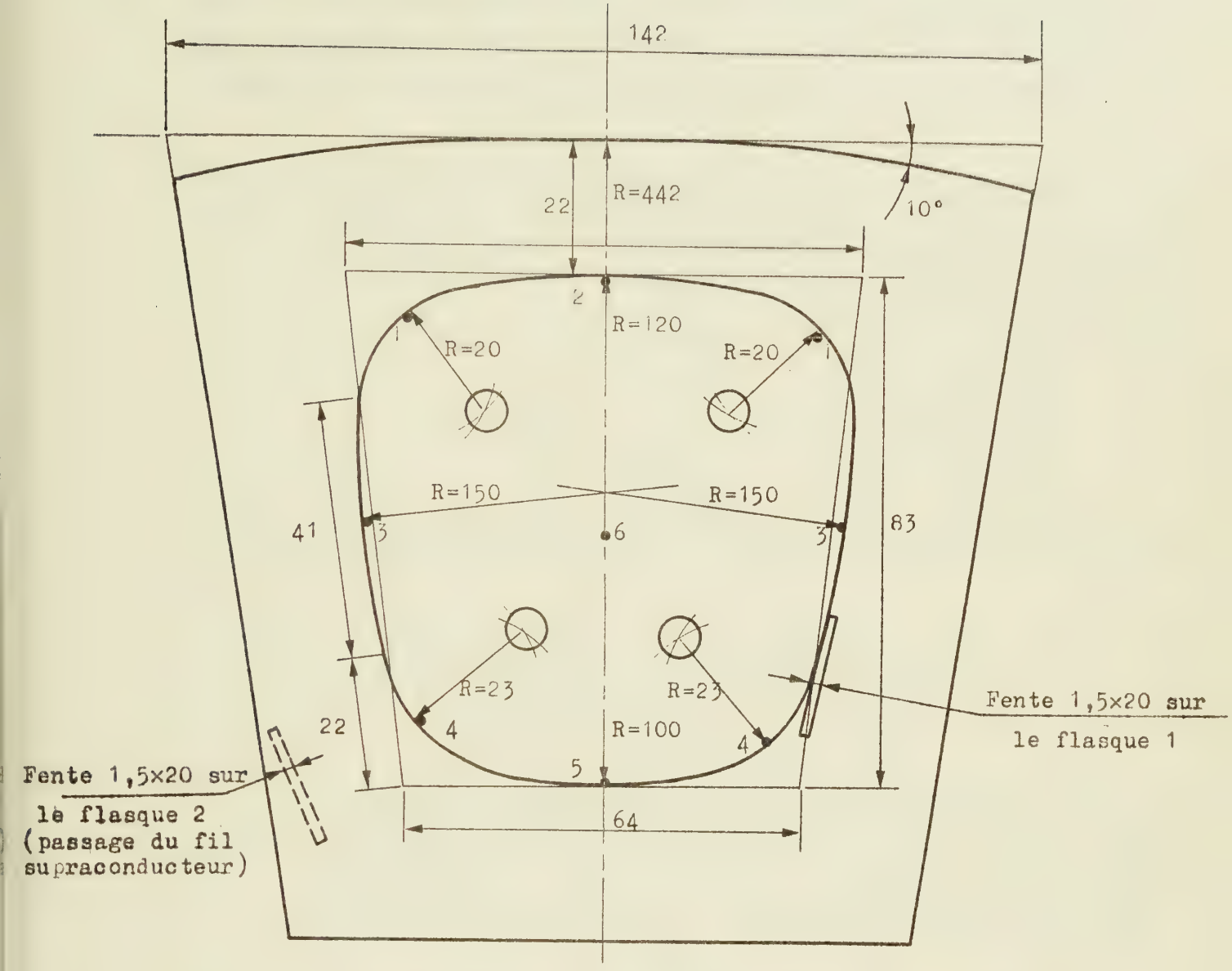


Figure (3-7) : Coupe A-A' par un plan médian du mandrin de la bobine inductrice en cuivre

1,2,3,4,5,6 : Points de mesure du champ magnétique dans le plan de coupe

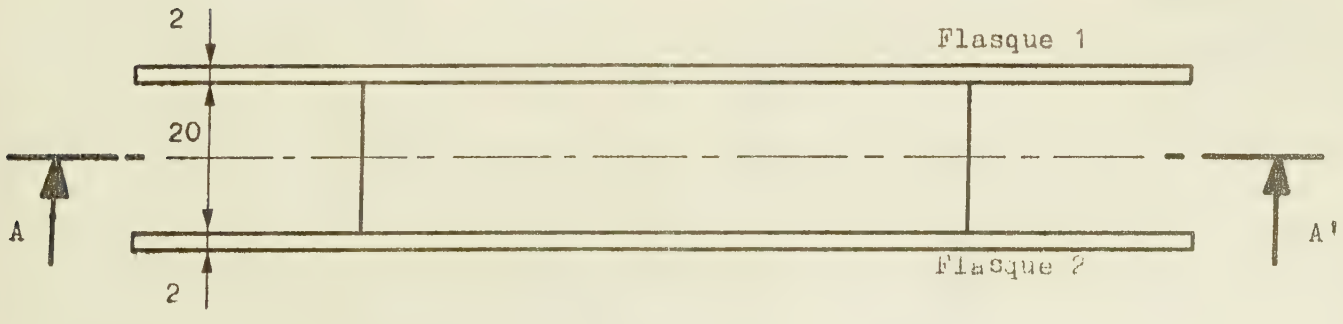


Tableau (3.2)

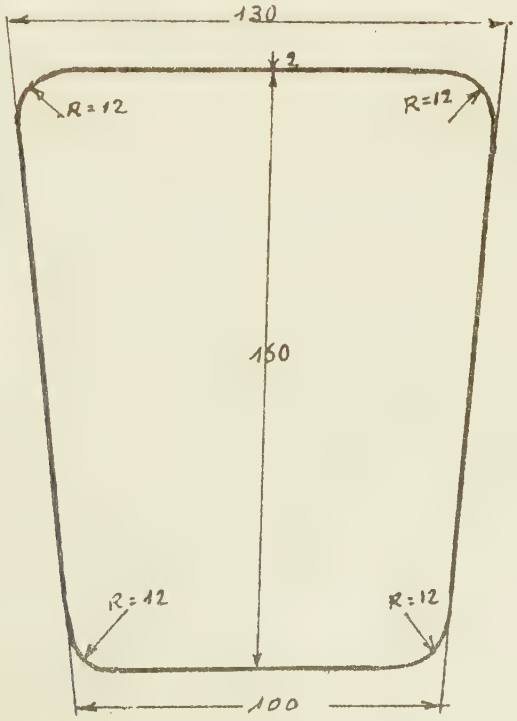
Valeur de la composante axiale de l'induction magnétique dans le plan de symétrie d'une bobine (plan perpendiculaire) à l'axe de l'inducteur, au niveau de la couche interne de conducteurs.

Point de mesure n° (cf. Fig (3.7)	rayon de courbure correspondant	induction mesurée (composante axiale)
1	20 mm	130 gauss
2	120 mm	115 gauss
3	150 mm	115 gauss
4	23 mm	125 gauss
5	100 mm	118 gauss
6	au centre	68 gauss

b - Mesurer l'inductance propre de ce bobinage

soit 37,6 m H

c - Mesurer la variation de la mutuelle inductance entre une bobine inductrice élémentaire et une bobine d'induit constituée d'un certain nombre de spires à pas diamétral en série. Ce bobinage est représenté sur la Fig.(3.8)



échelle : 1/2

bobine d'induit
(60 spires de
fil Ø = 0,2mm)

Fig. (3-8)

Les plans médians perpendiculaires à l'axe de la machines, des deux bobinages sont distants de x. La mutuelle inductance est alors mesurée entre les deux circuits précédents en fonction de l'angle de décalage représente sur la figure (3.9-b).

Le montage expérimental utilisé est représenté en perspective sur la figure (3.9-b), et le principe de la mesure est le suivant cf. Fig. (3.9-a) .

On mesure séparément L_1 et L_2 à l'aide d'un pont de capacité.

$$L_1 = 37{,}6 \text{ mH} \qquad L_2 = 1{,}61 \text{ mH}$$

il vient alors

$$\bar{V}_1 = j\,\omega\,\bar{\Psi}_1 \qquad (3.12)$$

$$\bar{V}_2 = j\,\omega\,\bar{\Psi}_2 \qquad (3.13)$$

avec

ω la pulsation électrique $= 2 \times f$

$$\bar{\Psi}_1 = L_1\,\bar{I}_1 \qquad (3.14)$$

$$\bar{\Psi}_2 = M\,\bar{I}_1 \qquad (3.15)$$

soit

$$M = L_1\,\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \qquad (3.16)$$

ou

$$M = \frac{\bar{V}_2}{\omega\,\bar{I}_1} \qquad (3.17)$$

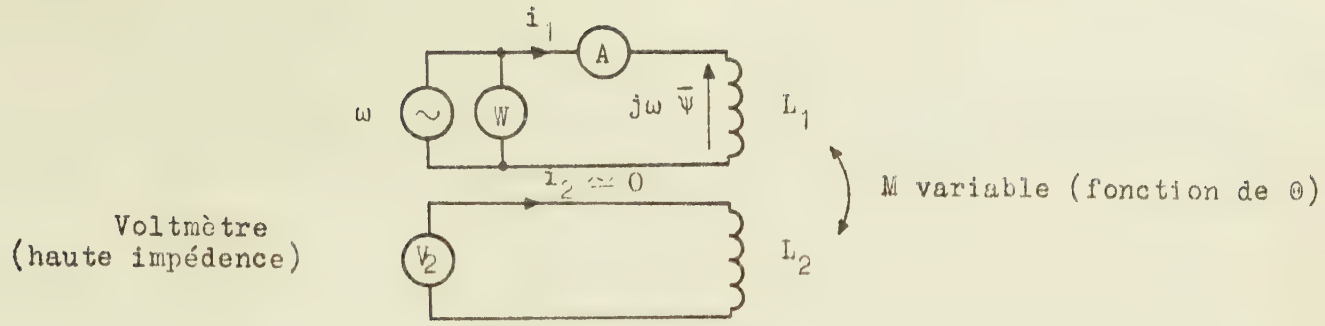
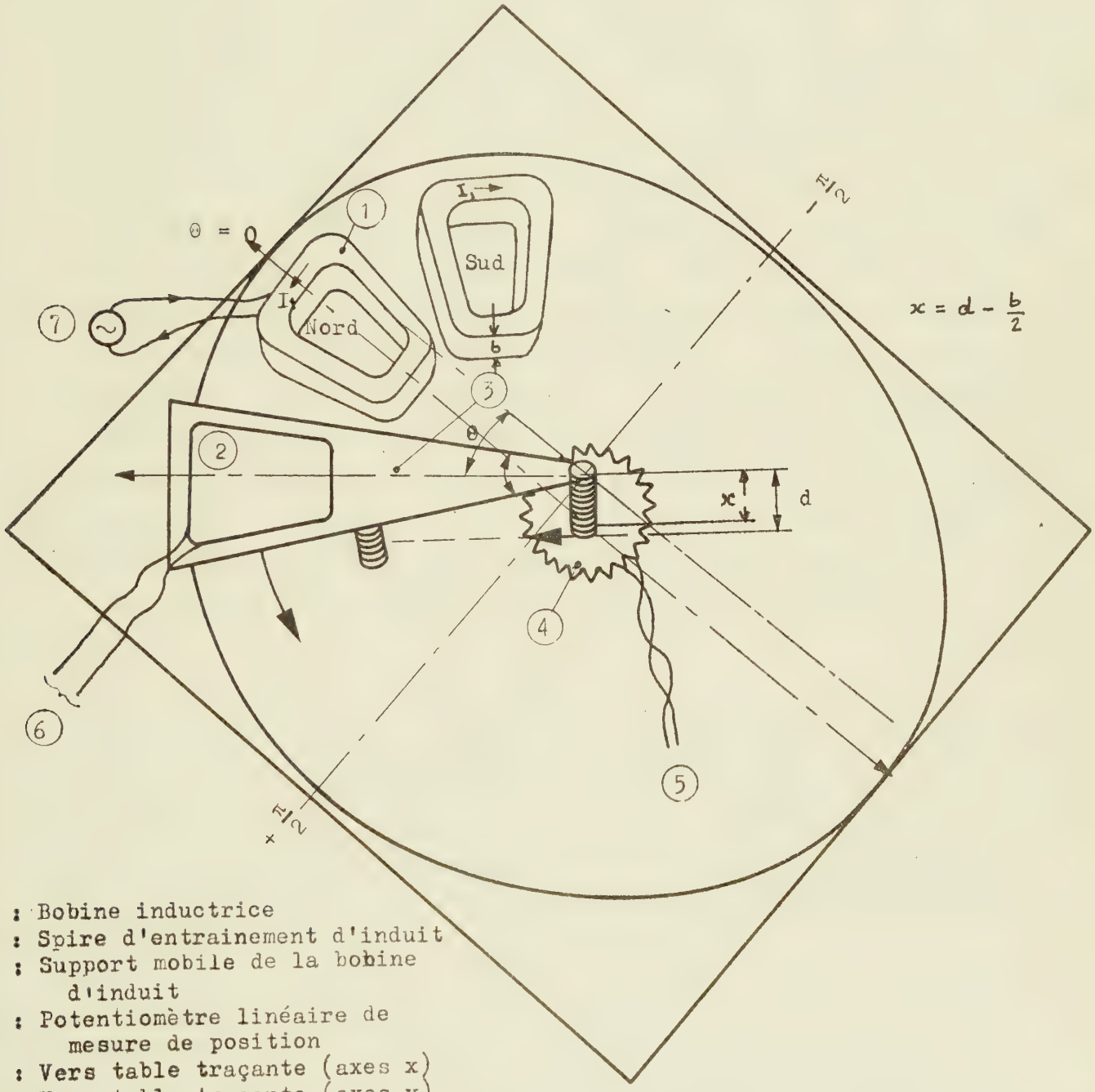


Figure (3-9a) - Schéma de principe de mesure de l'inductance naturelle



1 : Bobine inductrice
2 : Spire d'entrainement d'induit
3 : Support mobile de la bobine d'induit
4 : Potentiomètre linéaire de mesure de position
5 : Vers table traçante (axes x)
6 : Vers table traçante (axes y)
7 : Alimentation alternative de la bobine inductrice

Figure (3-9b) : Perspective du montage expérimental de mesure de la mutuelle inductrice

Nous avons retenu la dernière relation pour détenir M. Le coefficient de couplage est alors donné par :

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad (3.18)$$

La Fig. (3.10) montre la forme de la force électromotrice induite dans la bobine mobile, en fonction de θ et pour une distance axiale égale à 3,5 cm et pour un courant $I_1 = 0,5$ A dans la bobine inductrice. La f.e.m. induite n'a une valeur significative que sur un secteur s'étendant sur 45° environ de part et d'autre de l'axe de la bobine inductrice. La figure (3.11) montre la variation en fonction de θ de la f.e.m. induite dans la bobine mobile -(spire d'enroulement d'induit)- en présence de trois bobines inductrices adjascentes (deux pôles sud de part et d'autre du pôle Nord d'axe $\theta = 0$). La figure (3.12) correspond au cas de cinq bobines inductrices constituée par deux pôles Nord et Sud placés de part et d'autre du pôle Nord centré sur $\theta = 0$. Ces courbes ont été obtenues par superposition de courbes élémentaires semblables à celle de la fig. (3.10). On notera sur la figure (3.12) que sur un double par polaire centré sur $\theta = 0$ la variation de la tension induite dans la bobine mobile par l'ensemble des bobines inductrices présentées, est très voisine d'une variation sinusoïdale de la forme :

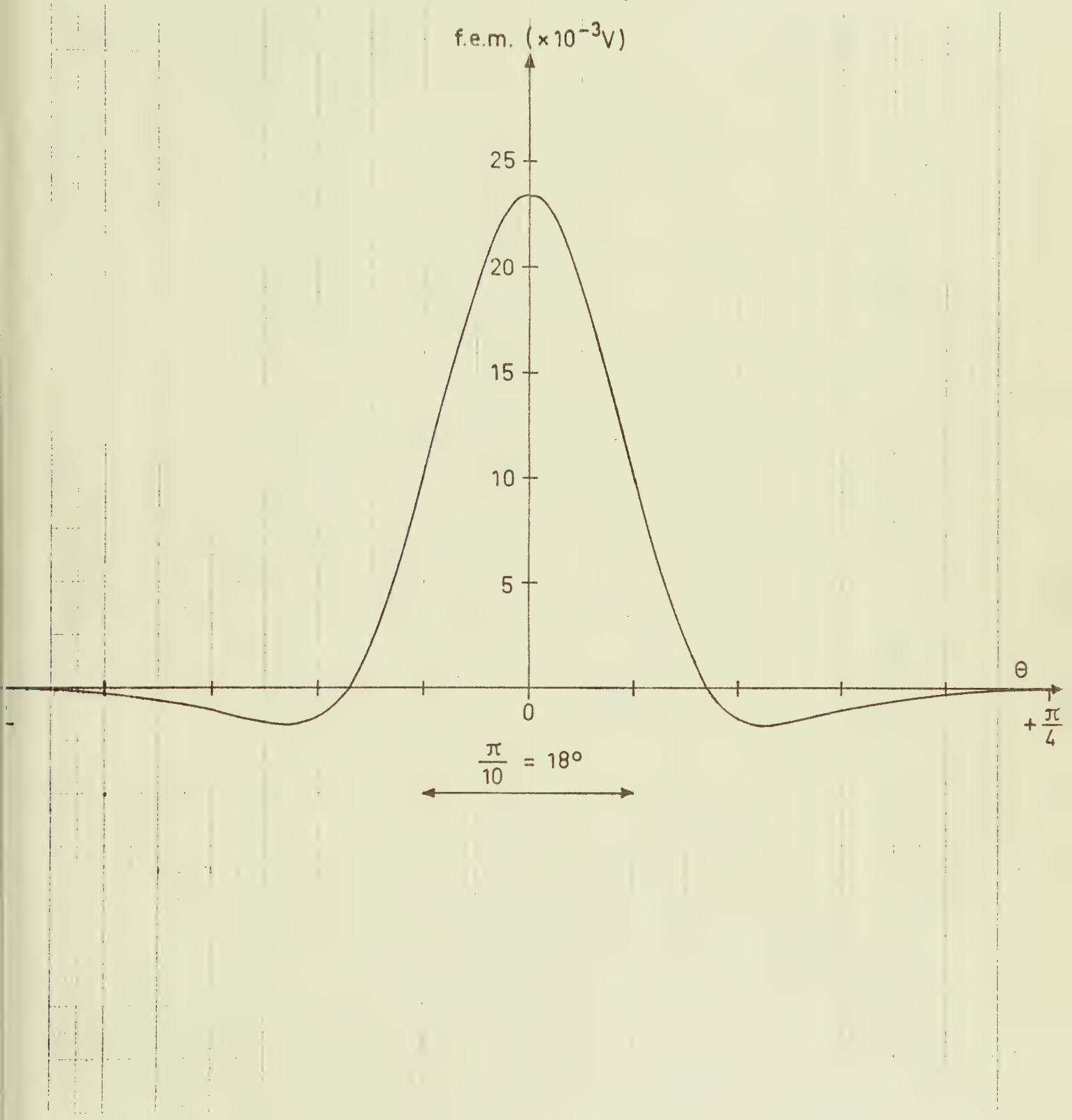
$$v = - V\sqrt{2} \cos 10\theta$$

Cette tension est proportionnelle à la mutuelle inductance entre les bobines industrices et le bobinage d'induit (mobile). Sur le double intervalle polaire considéré. La variation de cette tension n'est plus influencée par l'adjonction de pôles inducteurs supplémentaires, de part et d'autre du pôle Nord origine.

Figure (3-10)

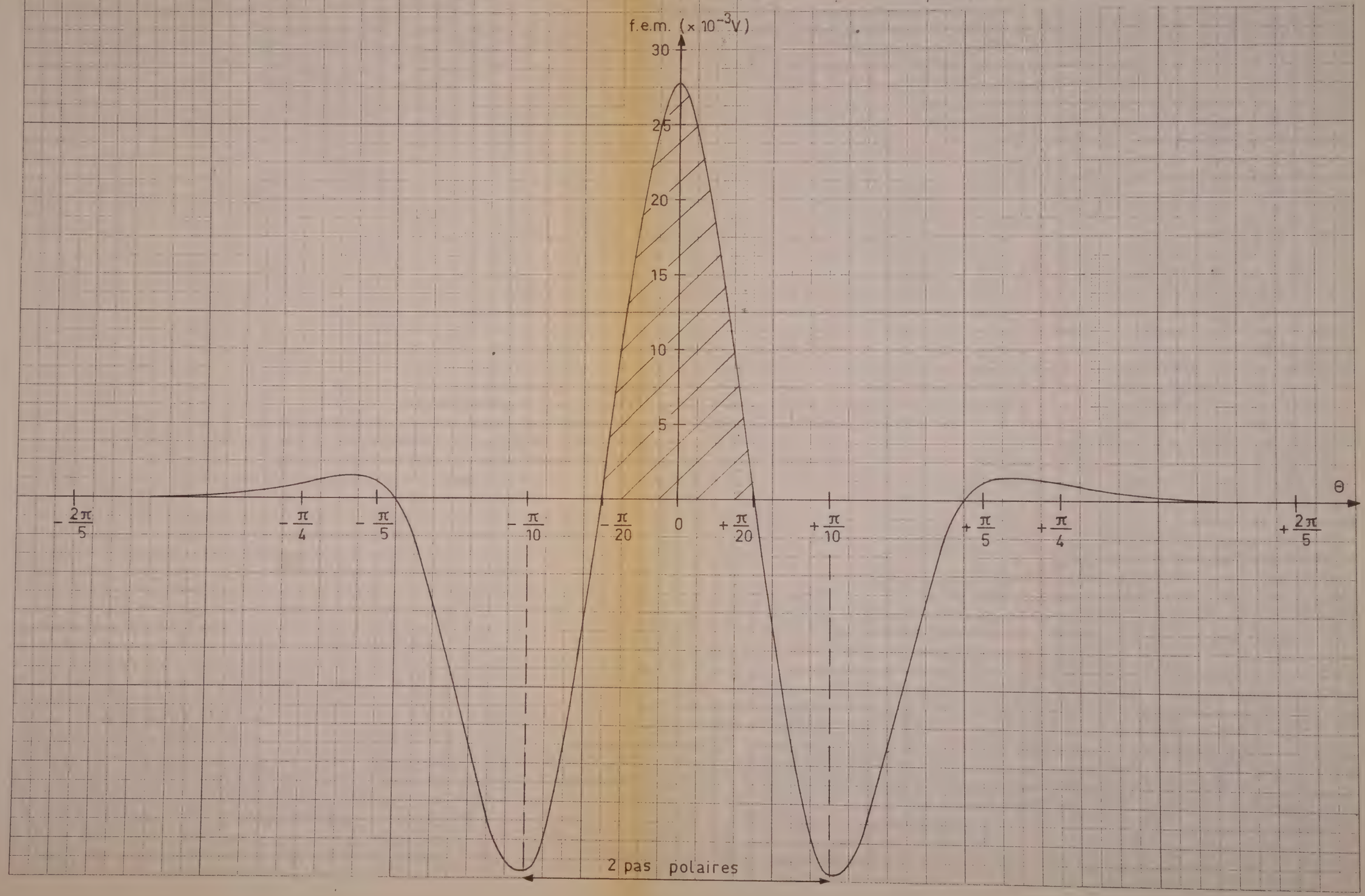
Force électromotrice induite dans la bobine mobile,
en fonction de sa position angulaire θ

I_1 = 0,5 A courant dans la bobine inductrice
d = 5 cm x = 3,5 cm

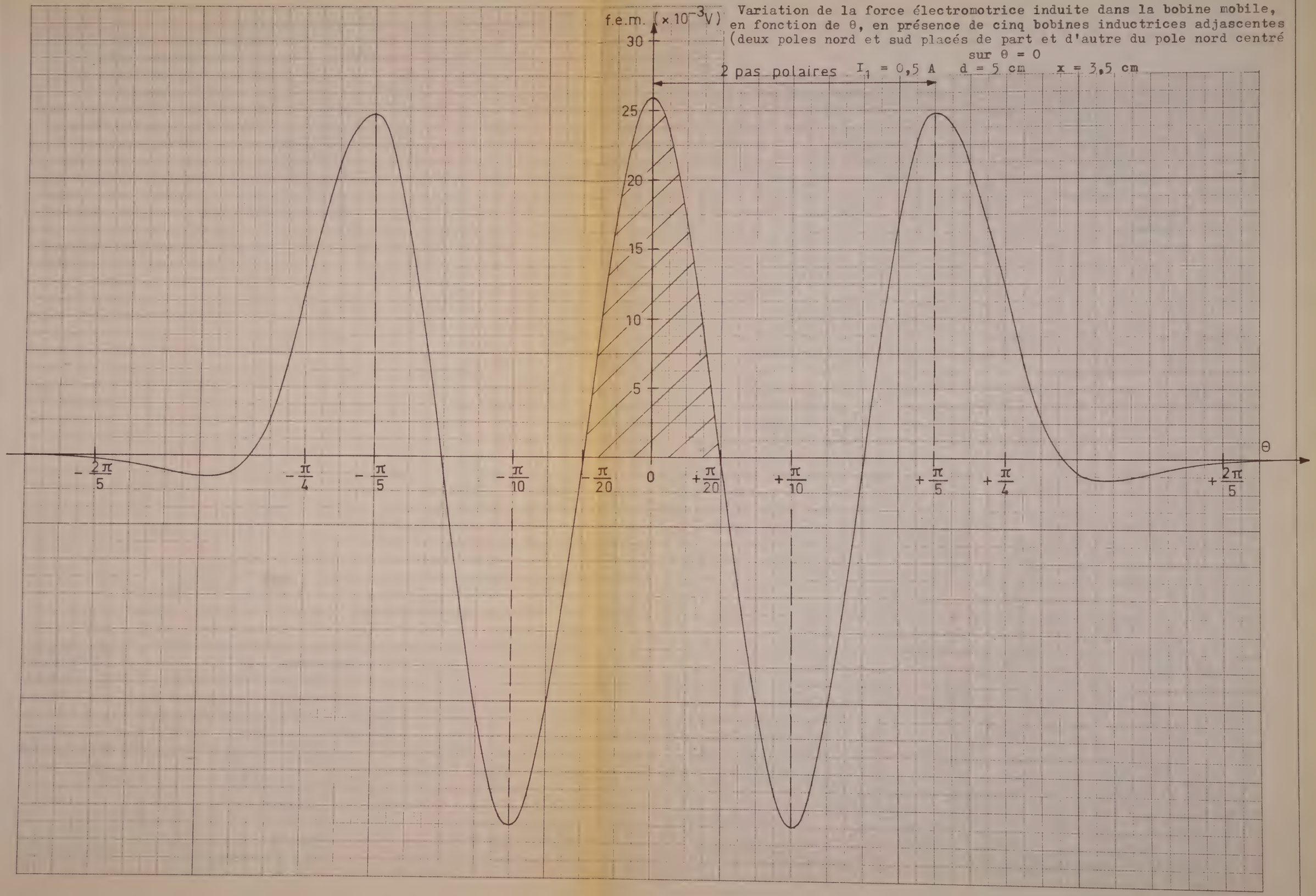


Variation de la force électromotrice induite dans la bobine mobile, en fonction de θ en présence de trois bobines inductrices adjascentes (deux poles sud et part et d'autre du pole nord centré sur θ = 0)

I_1 = 0,5 A d = 5 cm x = 3,5 cm



Variation de la force électromotrice induite dans la bobine mobile, en fonction de θ, en présence de cinq bobines inductrices adjascentes (deux poles nord et sud placés de part et d'autre du pole nord centré sur θ = 0



La figure (3.14) montre la variation du coefficient de couplage K défini en (3.18) en fonction de x dans le cas d'une seule bobine inductrice.

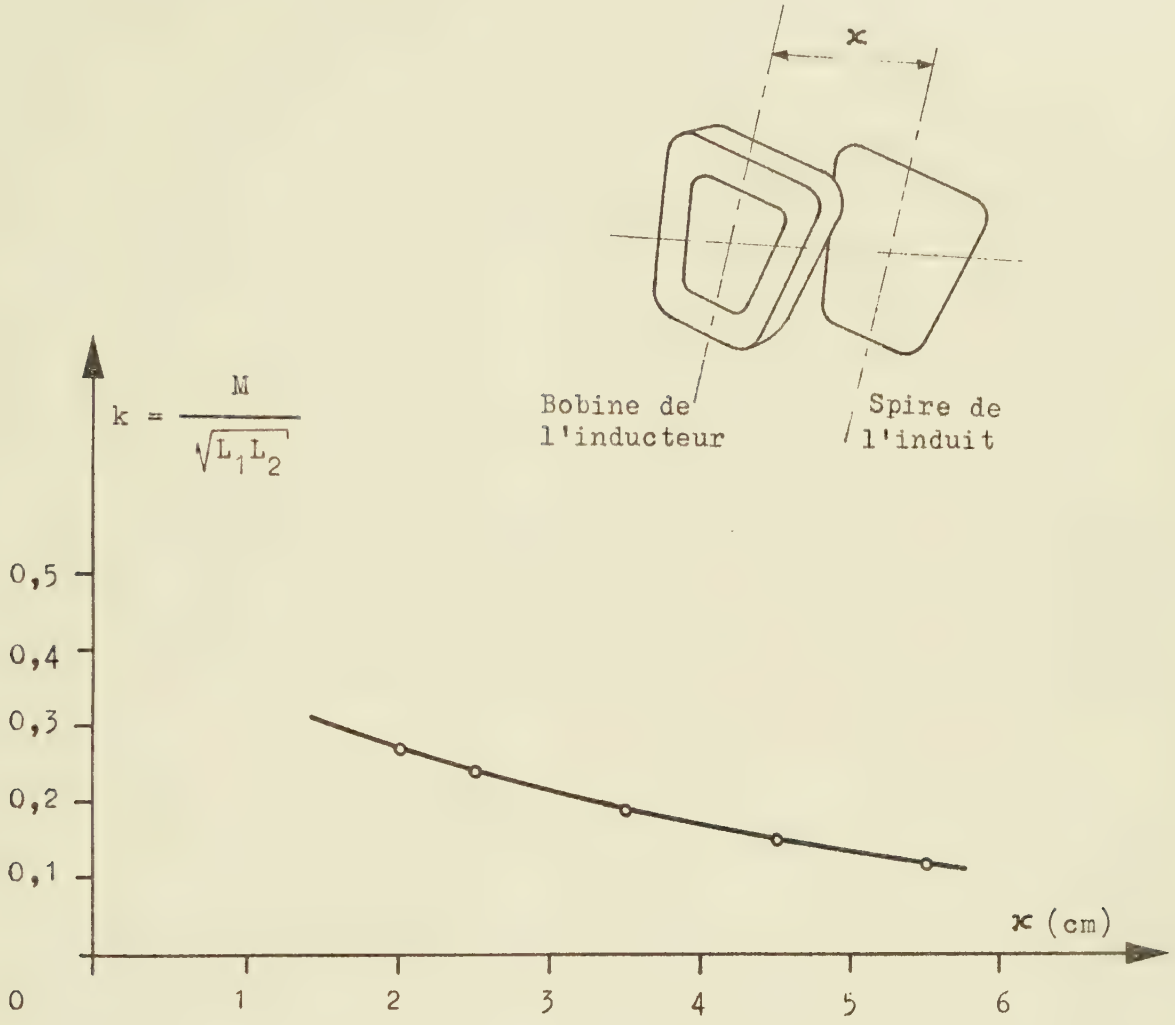


Fig. (2.14)

3.3. ESTIMATION DES EFFORTS ELECTROMAGNETIQUES S'EXERCANT SUR UN POLE INDUCTEUR ISOLE

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer la spire circulaire épaisse associée. Les caractéristiques de ce bobinage "équivalent" sont représentées sur la figure (3.16).

Soient :

r le rayon de la section droite du tore

a son rayon moyen.

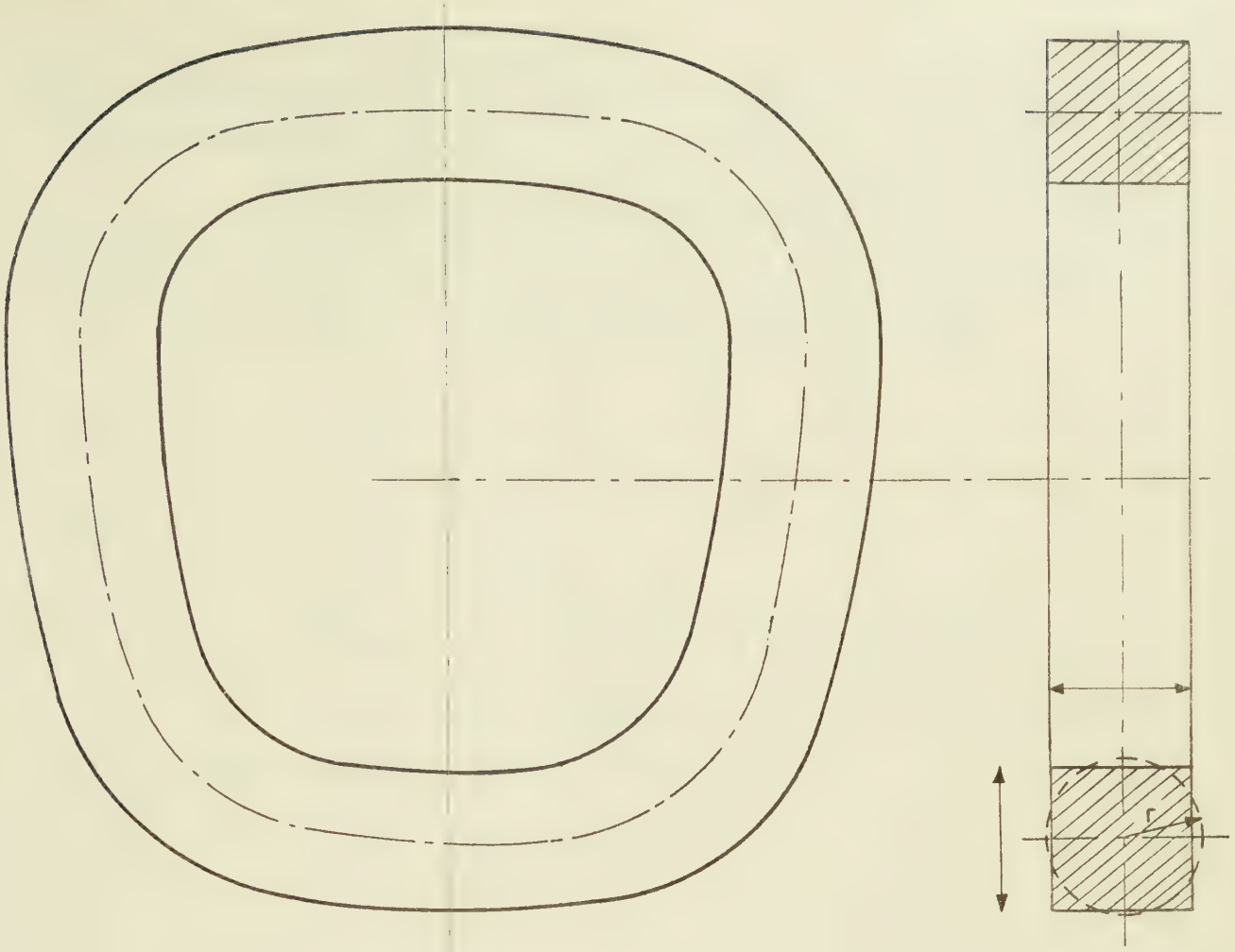


Fig. (3-15)

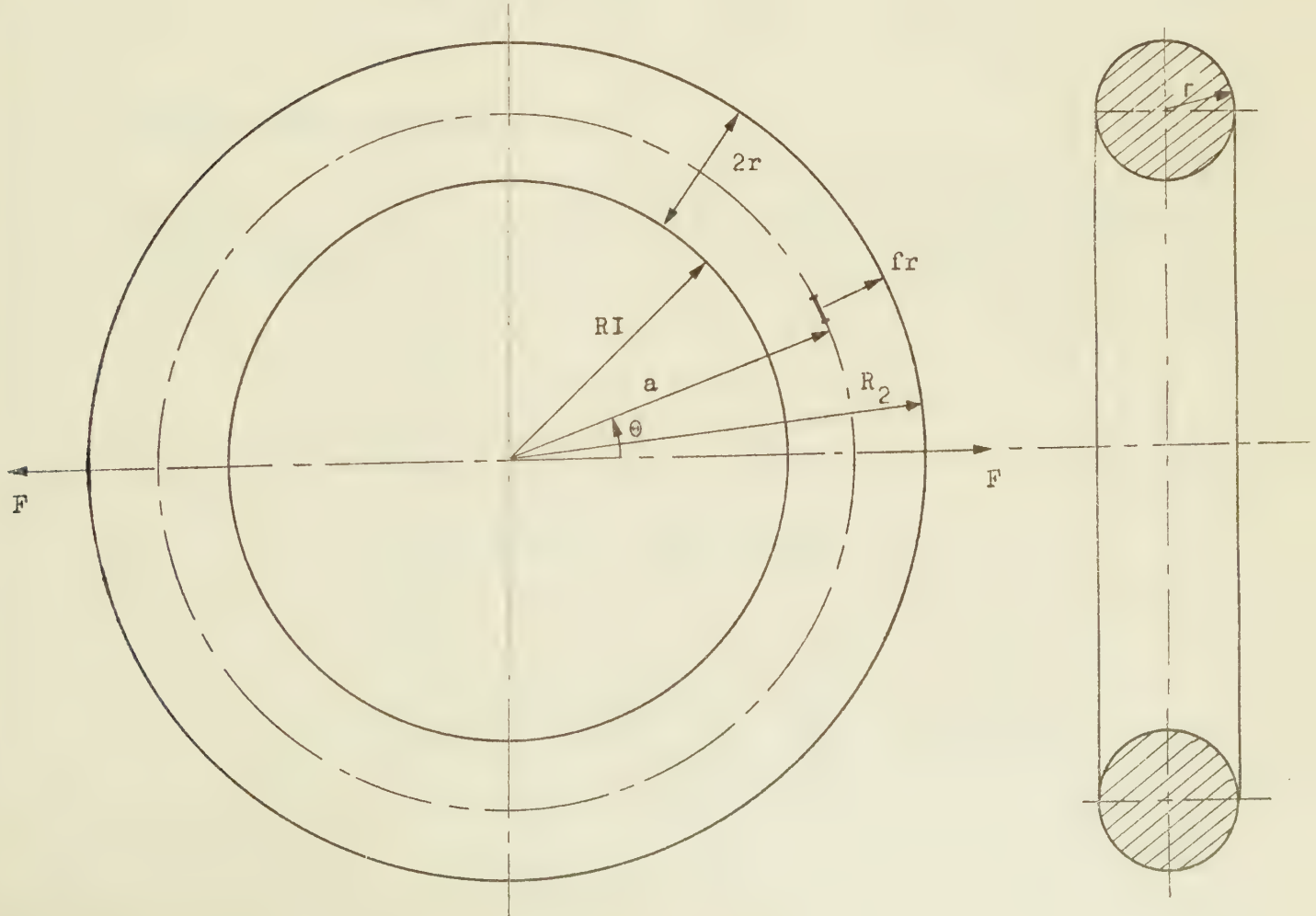


Fig. (3-16)

Un ordre de grandeur de l'effort d'éclatement s'exerçant sur le bobinage peut être obtenu très simplement de la façon suivante.

Supposons ces efforts concentrés sur le diamètre moyen du tore et soit f_r la densité linéique des efforts radiaux.

L'énergie magnétique est donnée par [26]

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

comme

$$L = a \mu_o \left[L_g \frac{8a}{r} - \frac{7}{4} \right]$$

$$f_r \cdot 2\pi a \, da = dW$$

$$f_r = \frac{dW}{2\pi a \, da} = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial W}{\partial L} \frac{dL}{da} = \mu_o \frac{I^2}{4\pi a} \left[L_g \frac{8a}{r} - \frac{3}{4} \right]$$

L'effort total s'exerçant perpendiculairement à un plan de section droite diamétral est alors :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.a.f_r.\cos\theta \, d\theta$$

soit

$$F = \mu_o \frac{I^2}{2\pi} \left[L_g \frac{8a}{r} - \frac{3}{4} \right]$$

Application numérique

Prenons comme exemple une bobine polaire de l'inducteur de la machine "plate", et supposons que l'ensemble des spires forment une bobine circulaire de caractéristique :

$a = 5,3 10^{-2}$ m

$r = .,01$ m

$I = ni = 550 \times 200 = 16.5.10^3$ A

F = 1980 daN

Donc sur chacune des 550 spires

35 N environs.

3.4. REALISATION ET ESSAI D'UNE BOBINE INDUCTRICE EN FIL SUPRACONDUCTEUR

Dans le but de connaître le comportement du fil supraconducteur prévu pour le bobinage, nous avons bobiné une bobine d'essai. Ce fil supraconducteur utilisé a les caractéristiques suivantes :

- Fil supraconducteur multifilamentaire en $Nb_{56}Ti_{44}$
- Nombre de filaments : 121
- Diamètre d'un filament $\emptyset_f$ = 40 microns
- Pas de torsadage : 10 mm
- Les filaments sont noyés dans une matrice de cuivre le rapport $\frac{\text{cuivre}}{\text{supra}} = 1,8$
- Diamètre extérieur sans vernis = 0,75 mm
- Diamètre extérieur sur vernis = 0,78 mm
- La figure (3-17) montre le comportement de ce fil supraconducteur à la traction. Nous constatons que la limite d'élastisité est obtenue pour un effort de 25 daN, et la limite de rupture pour 30 daN.

Le mandrin de la bobine représenté sur la figure (3-18) est fabriqué en verre epoxy SILECTO E-G-10 dont les caractéristiques mécaniques sont citées dans le tableau ci-dessous [29]:

- rupture à la traction	20 da N/mm^2
- rupture à la compression	40 da N/mm^2
- rupture à la flexion à 20°C	40 da N/mm^2
- Module d'élasticité en flexion	2000 da N/mm^2
- coefficient de dilatation linéaire	$1,6.10^{-5}$
- Résistance à la chaleur continue	155°C
- constante diélectrique à 1MHz	4,2 - 4,8
- rigidité diélectrique à 20°C	25 KV/mm

Longueur du fil 25 cm
Vitesse d'allongement 125 mm / mn
Vitesse de roulement du papier 1000 mm / mn

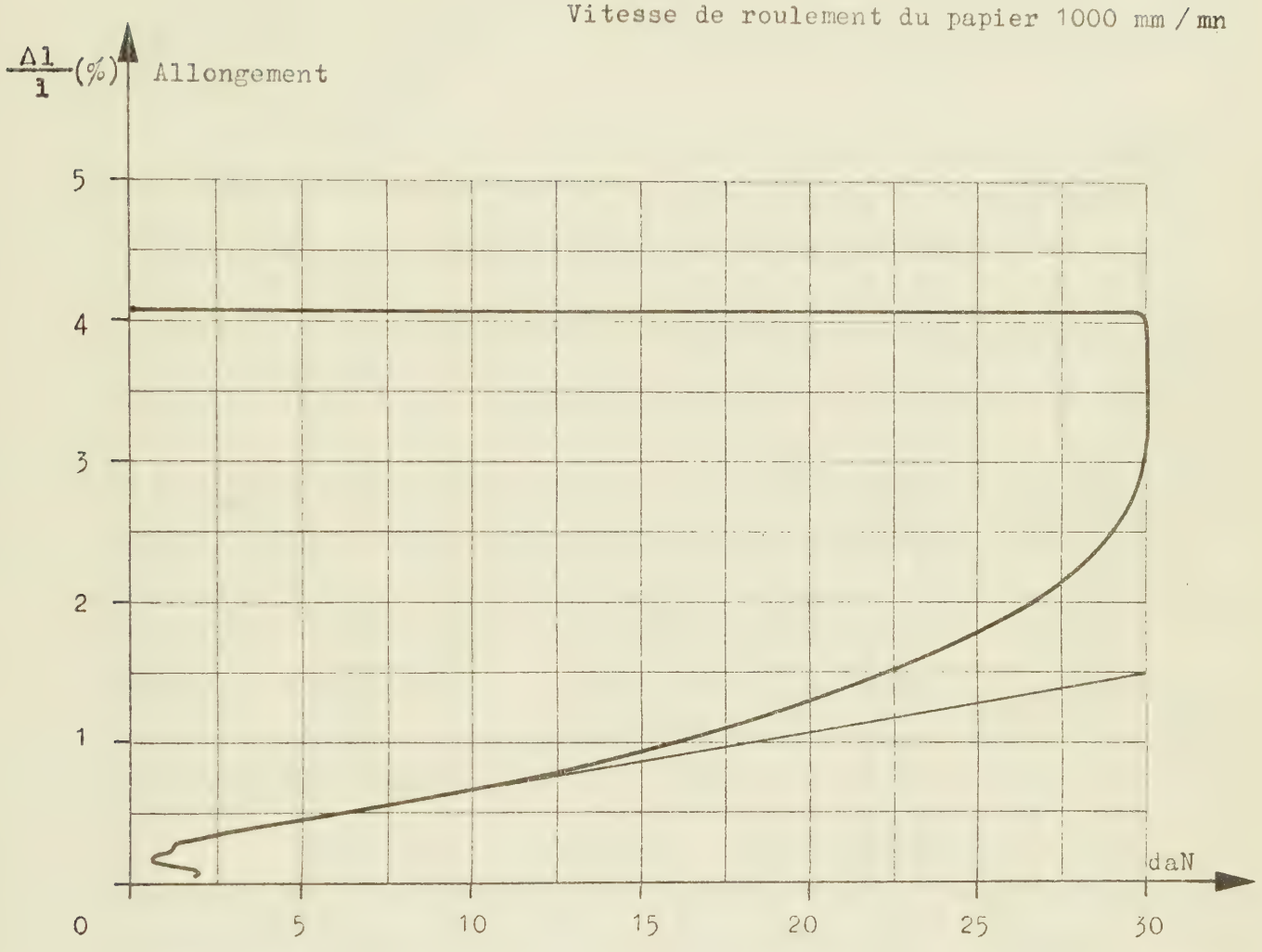


Figure (3-17) : Comportement du fil supraconducteur à la traction

Ce mandrin est constitué d'un noyau central et de deux flasques collés de part et d'autre de ce dernier avec de "l'araldite". Il a supporté avec succès un nombre élevé de cyclages thermiques correspondant à une immersion rapide dans l'azote liquide.

Le bobinage du fil supraconducteur a été réalisé en exerçant une tension constante sur le fil de 20 N. La bobine est constituée de 23 couches, chacune comporte 24 spires jointives. Les couches sont isolées entre elles par un ruban de tissu de verre spécialement traité.

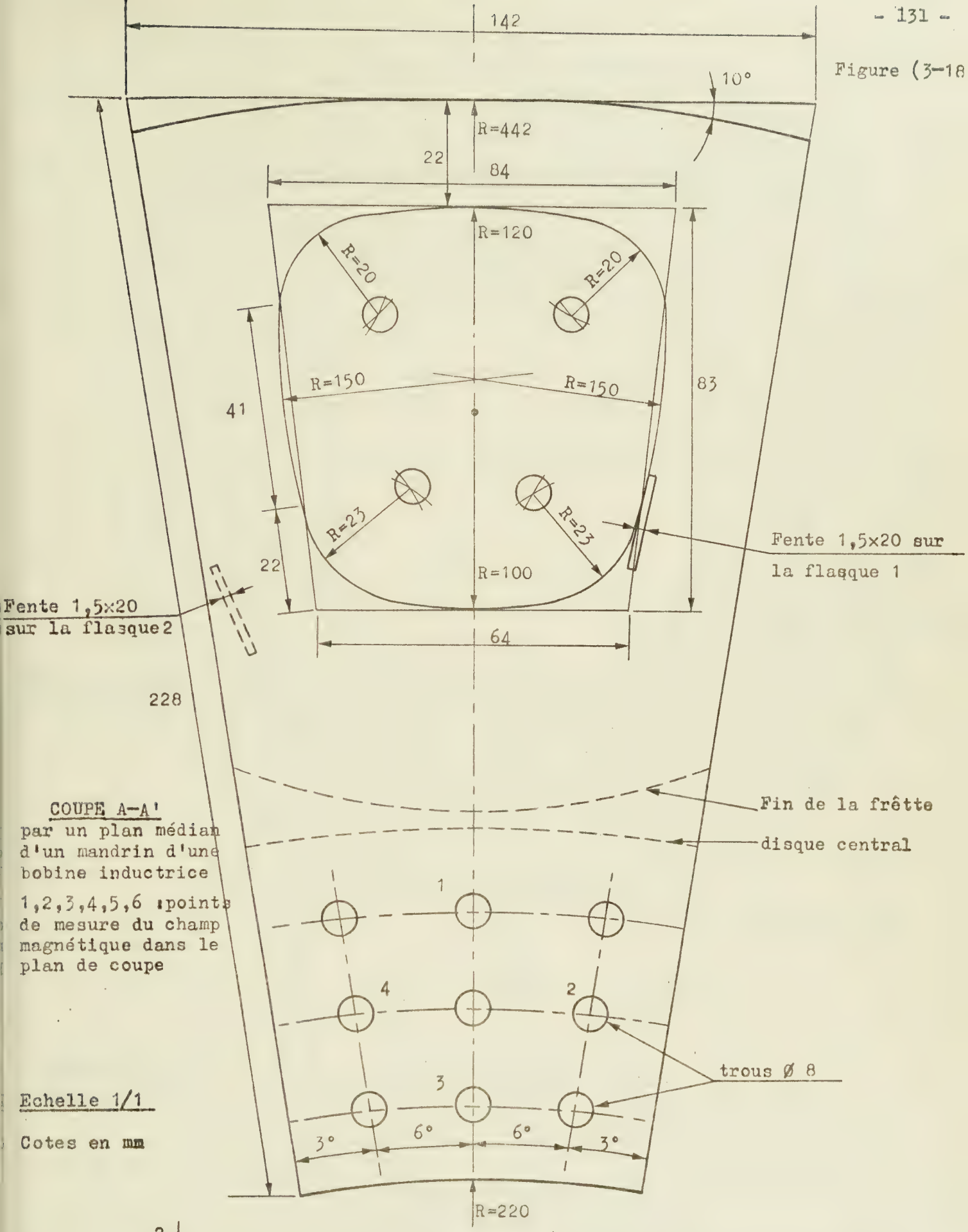
Le bobinage a ensuite subi une imprégnation soigneusement appliquée (imprégnation de résine epoxy sous vide dans un premier temps puis sous pression ensuite Cf. Annexe 4). Le comportement de l'ensemble au cyclage thermique de nouveau fait l'objet d'une étude expérimentale. Aucune altération de la rigidité mécanique de l'ensemble n'est apparue après un nombre élevé de cycles.

Nous avons ensuite fretté cette bobine. La frette a été calculée en fonction des efforts électromagnétiques supportés pour le bobinage dont nous avons calculé l'ordre de grandeur au paragraphe 3.3. La frette est constituée d'un ruban de tissu de verre epoxy enroulé sous tension constante de 30 N autour du bobinage cf Fig (3-19), et photo (5) et imprégné couche par couche. L'ensemble a de nouveau été soumis à un cyclage thermique en le plongeant brusquement dans l'azote liquide.

Notre but en effectuant ce cyclage était de faire apparaître des microcraquelures dans la résine d'imprégnation, par l'intermédiaire des contraintes différentielles, de façon à éviter lors de la mise en service du bobinage les effets d'échauffement néfaste pour le fil supraconducteur liés à la formation de ces failles ou de ces fissures.

Le comportement électromagnétique du bobinage à fait l'objet d'une "étude de training". La fig. (3-20) montre l'évaluation du courant critique en fonction du nombre de transition successives pour une mise en froid.

Figure (3-18)



COUPE A-A'
par un plan médian d'un mandrin d'une bobine inductrice

1,2,3,4,5,6 :points de mesure du champ magnétique dans le plan de coupe

Echelle 1/1

Cotes en mm

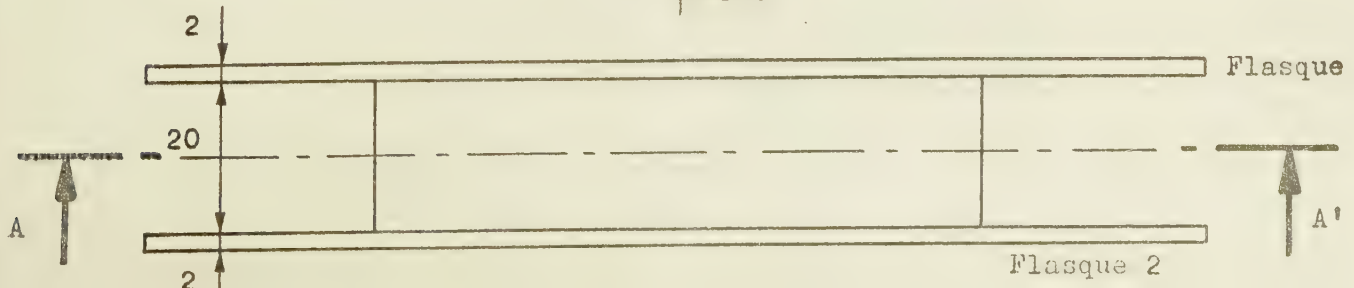
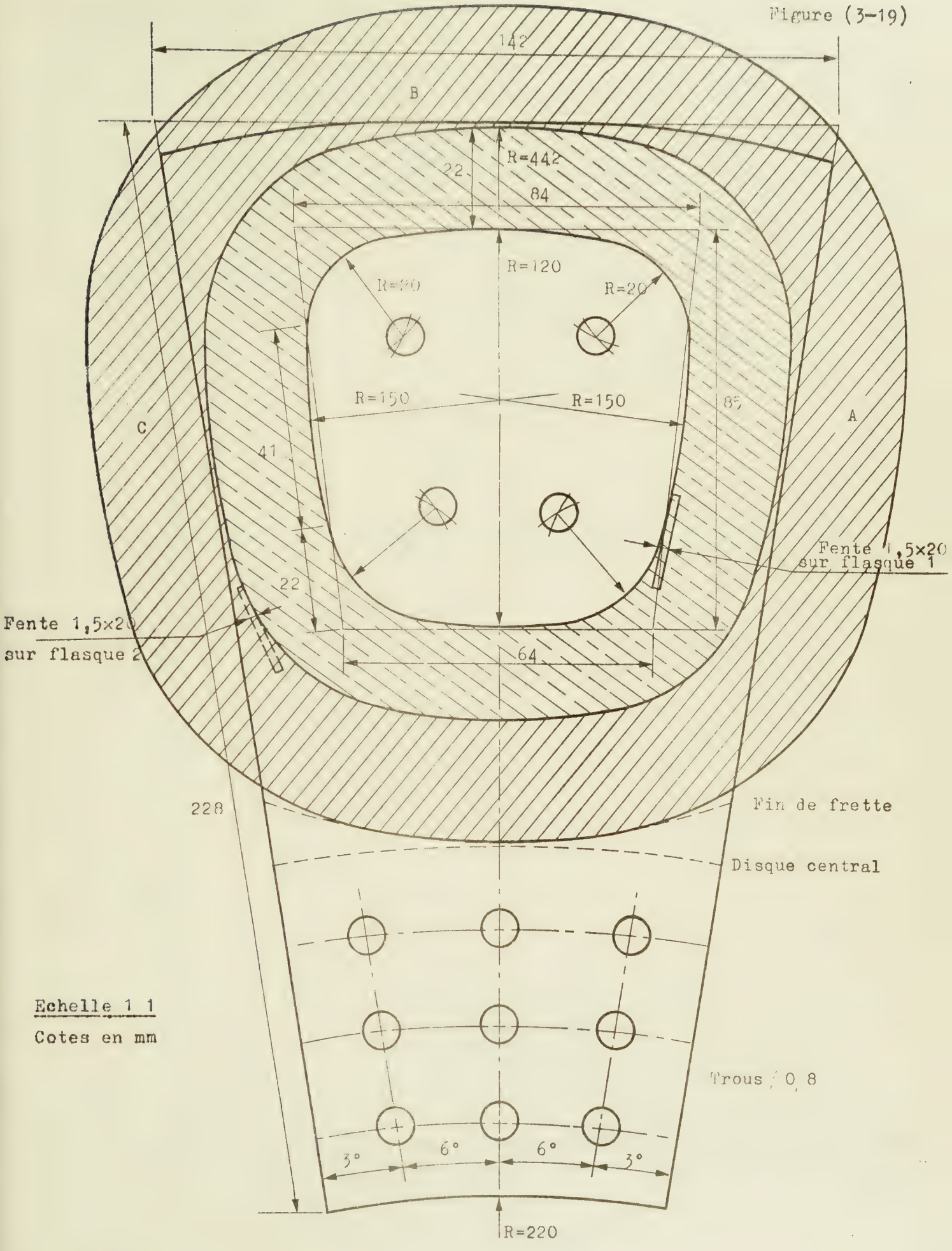


Figure (3-19)



Echelle 1 1

Cotes en mm

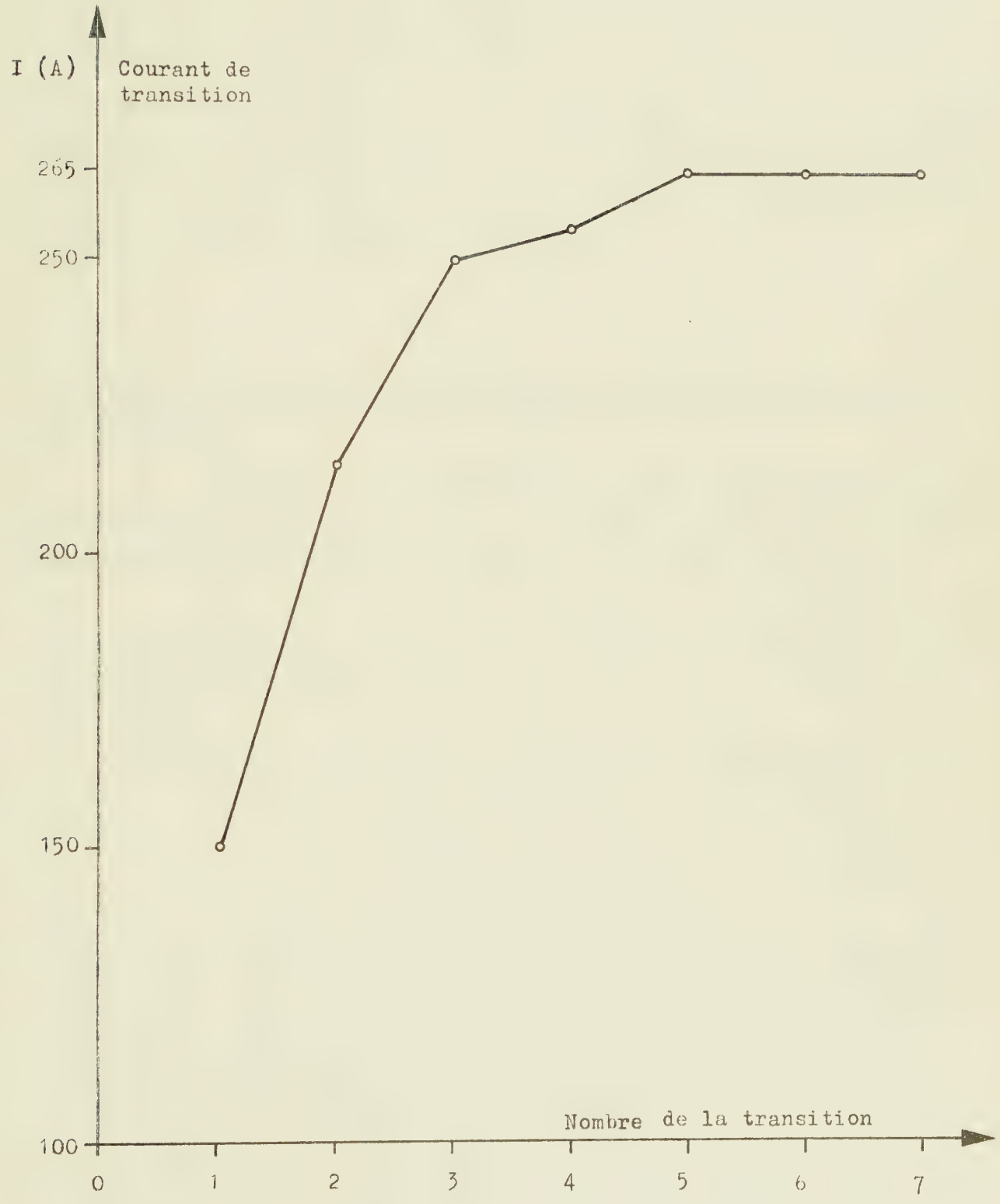

I (A)
Courant de transition
265
250
200
150
100
0
1
2
3
4
5
6
7
Nombre de la transition

Figure (3-20)

On constate que le courant critique final est de 265 A. En traçant la courbe connue donnant le courant critique en échantillon court du fil supraconducteur utilisé en fonction de l'induction extérieure appliquée et en nous reportant au tableau (3.2) on peut tracer la droite de charge correspondant au point "chaud du bobinage". Point du plan médian perpendiculaire à l'axe du bobinage au voisinage de la couche interne de conducteurs ou le champ est le plus élevé. On trouve alors [cf. Fig. (3-21)], un courant critique théorique de 265 A. Ce résultat démontre que le fil supraconducteur est bien refroidi d'une part et correctement immobilisé au sein du bobinage d'autre part.

3.5. REALISATION ET ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INDUCTEUR "PLAT" MULTIPOLAIRE

La bobine supraconductrice d'essai ayant donné satisfaction, la décision a été prise de construire 22 bobines identiques dont 20 formeront l'inducteur définitif [cf. Photo (8)].

De manière à mettre en évidence le phénomène d'accoutumance (training), les bobines ont été testées individuellement de la manière suivante :

- On a divisé les 22 bobines en 8 groupes comprenant

  groupes 1, 2, 3, 4, 5, 6 — 3 bobines

  groupes 7 et 8 — 2 bobines

- Avant l'alimentation en courant les groupes 1, 2, 4, 6, 8 ont subi 5 cyclages thermiques constitués par une immersion rapide dans l'azote liquide. Les groupes 3, 5, 7 ont subi 1 seul cyclage thermique

- Pour chaque type de traitement thermique nous avons employé plusieurs vitesses de montée en courants

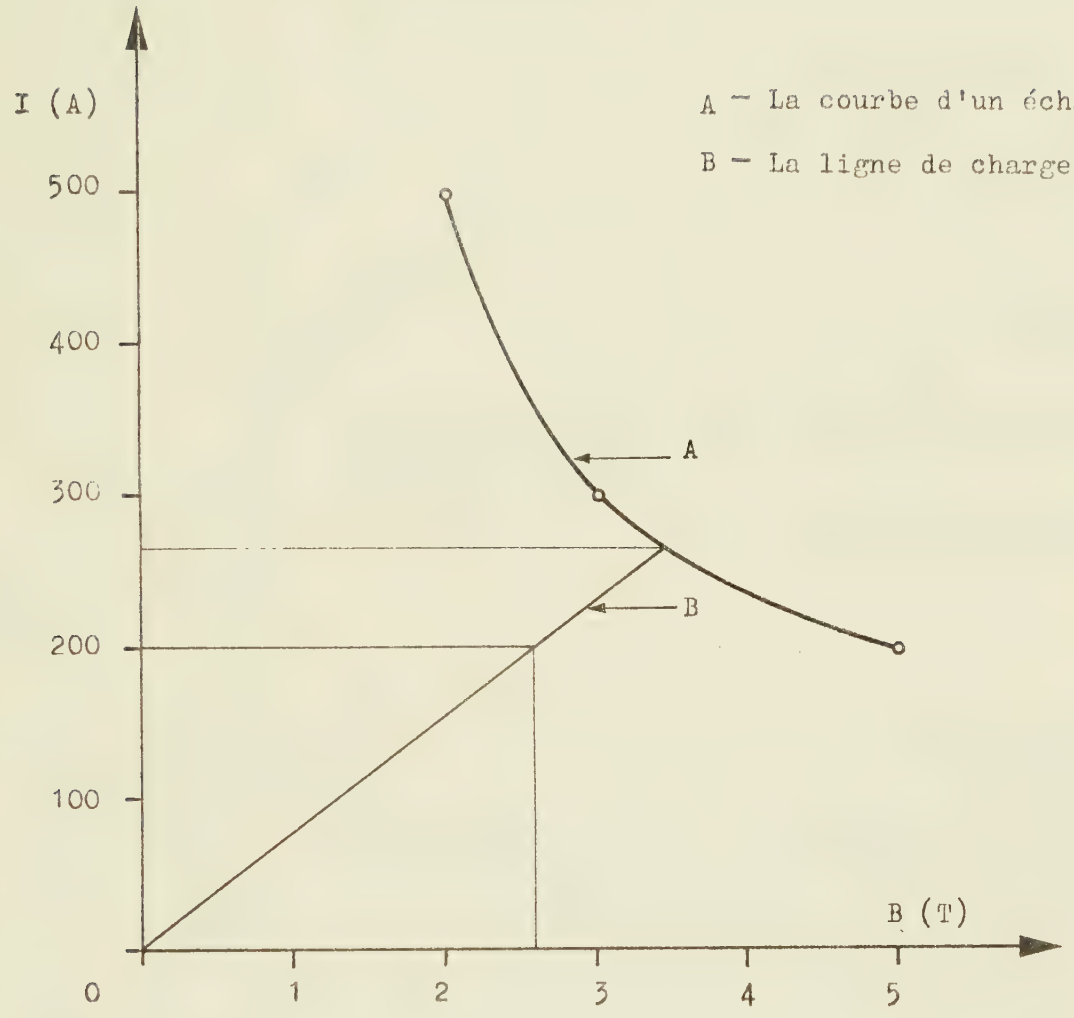


Figure (3-21)

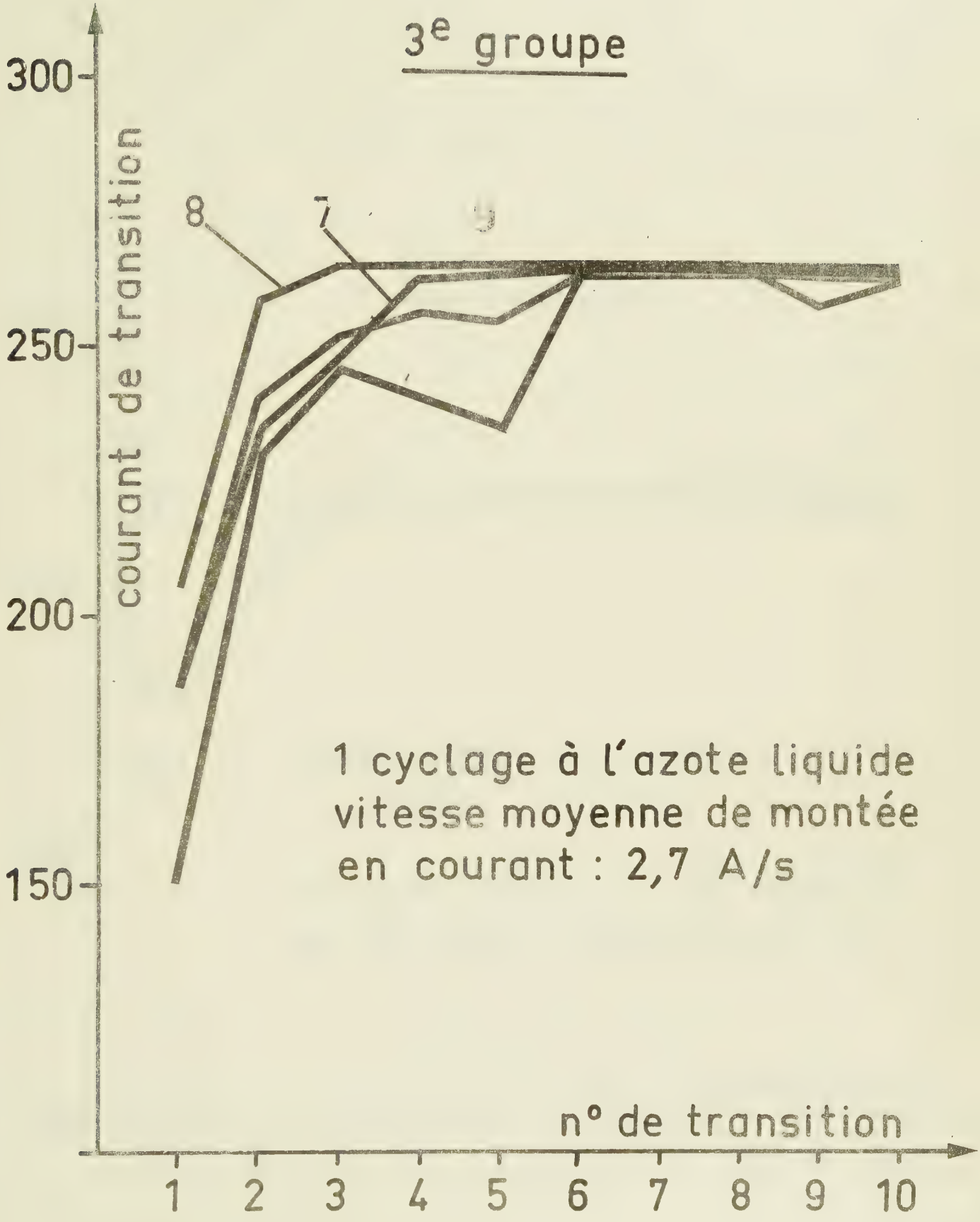
La courbe d'un échantillon court du fil supraconducteur utilisé dans les bobinages de l'inducteur.

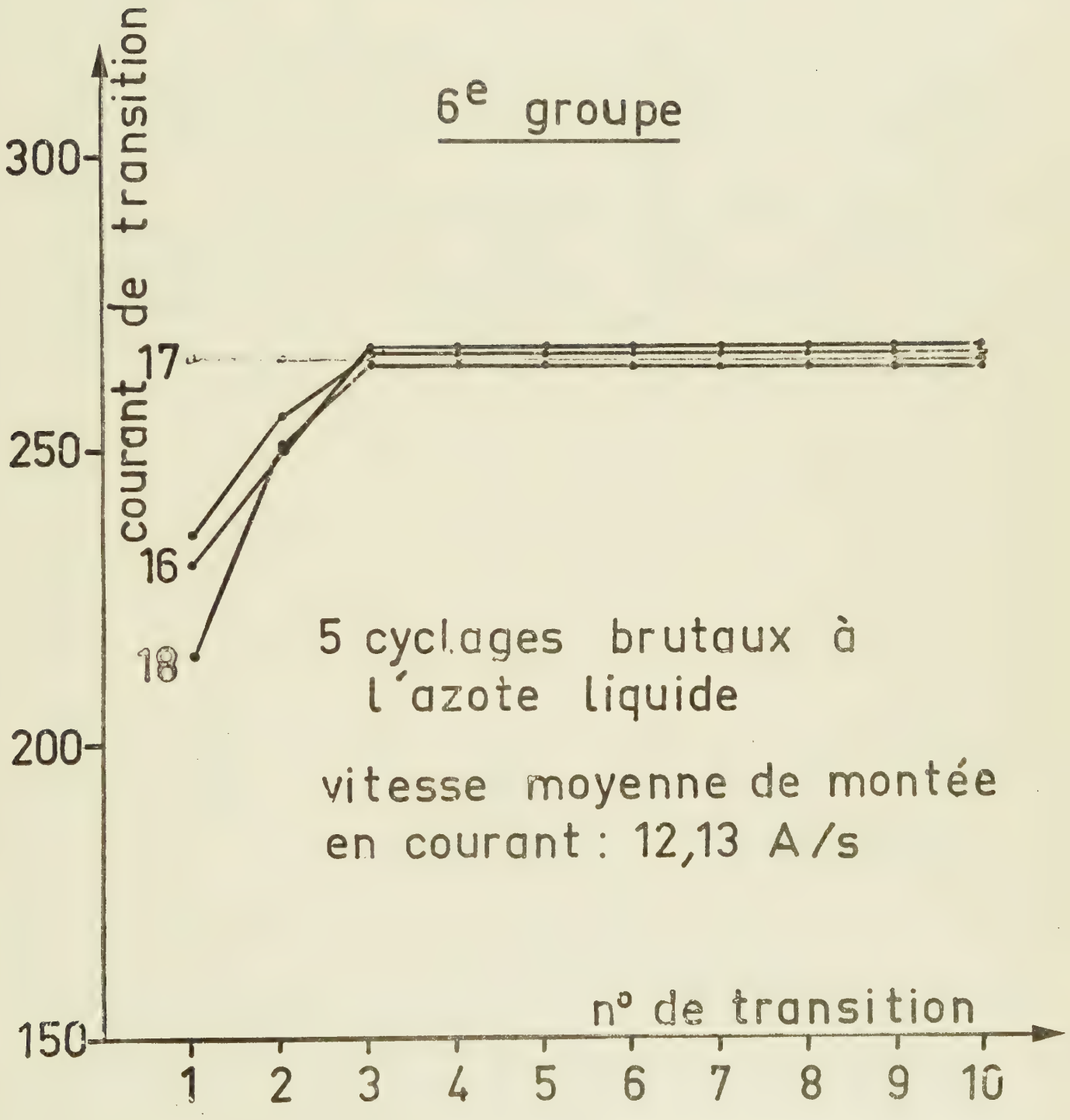
- Pour les groupes ayant subis 5 cyclages thermiques brutaux
  1- vitesse de montée lente (3 A/sec)
  2- vitesse de montée moyenne (6 A/sec)
  3- vitesse de montée rapide (9 A/sec)
  4- vitesse de montée plus rapide (12 A/sec)

- pour les groupes ayant subis un cyclage thermique brutale
  1- vitesse de montée lente (3 A/sec)
  2- vitesse de montée moyenne (6 A/sec)
  3- vitesse de montée rapide (9 A/sec)

Ce phénomène d'accoutumance (training) est caractérisé par l'amélioration, au cours des essais, du courant critique de transition de chaque bobine. On définit ainsi un "courant final de transition", comme la valeur la plus élevée du courant de transition, atteinte après un nombre d'essais suffisants.

Les figures (3.22) et (3.23) montrent l'évolution du courant critique de transition en fonction du nombre de transitions pour les groupes 3 et 6 respectivement. On constate que l'effet de "training" est beaucoup moins marqué pour le groupe 6 ayant subi un nombre de cycles thermiques plus élevés. Ceci peut s'interprêter par le fait que le cyclage thermique imposé au bobinage avant sa mise en service doit provoquer dans la résine d'imprégnation des craquelures qui libèrent de l'énergie au moment du cyclage, évitant ainsi un apport de chaleur nuisible au supraconducteur. Dans le cas d'une utilisation directe de la bobine cet apport de chaleur risquerait de se produire lors de l'apparition des efforts électromagnétiques pendant la montée en courant du bobinage.

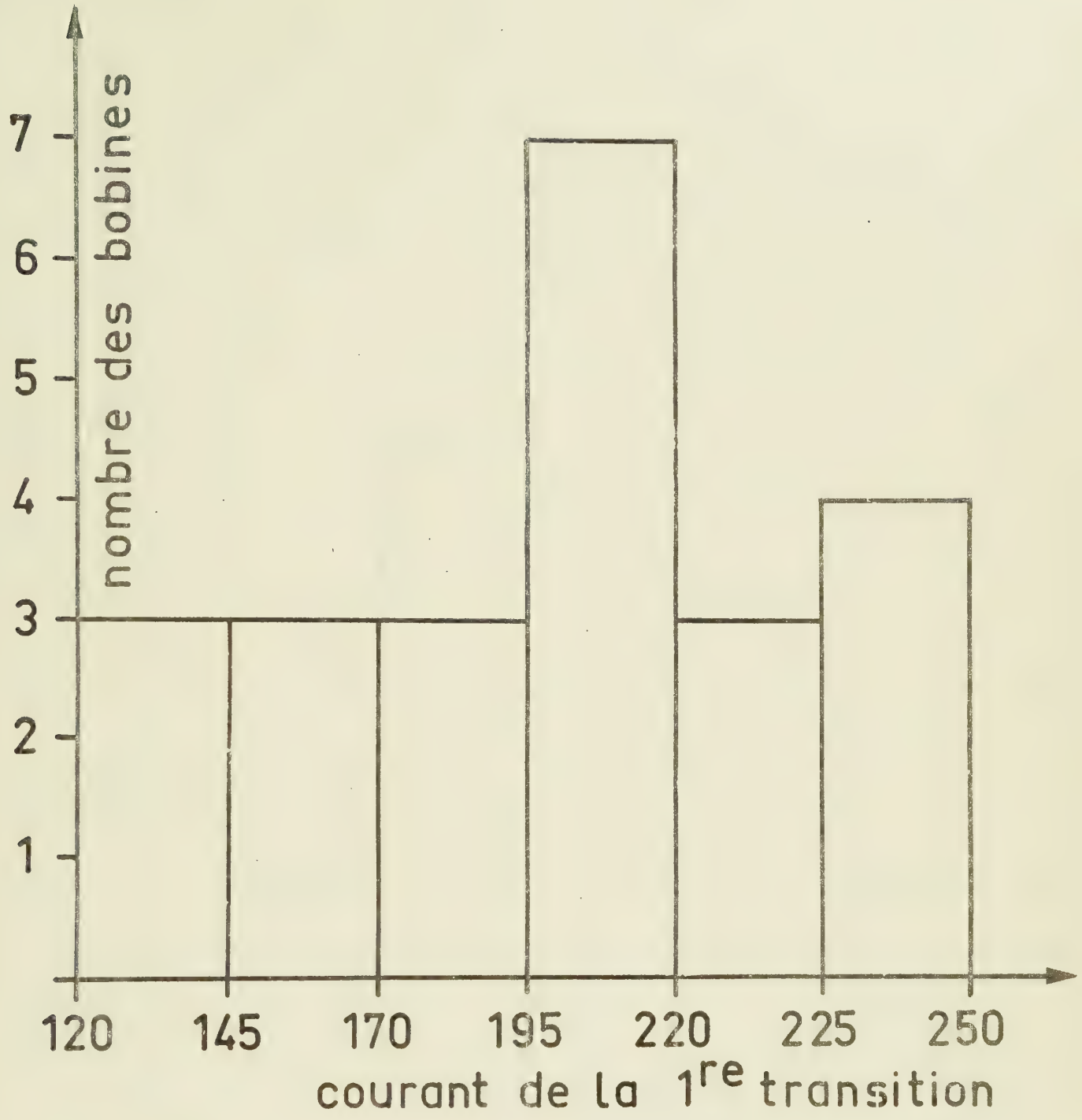

3e groupe
300
250
200
150
courant de transition
8
7
1 cyclage à l'azote liquide
vitesse moyenne de montée
en courant : 2,7 A/s
n° de transition
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


6e groupe
courant de transition
300
250
200
150
17
16
18
5 cyclages brutaux à
l'azote liquide
vitesse moyenne de montée
en courant : 12,13 A/s
n° de transition
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

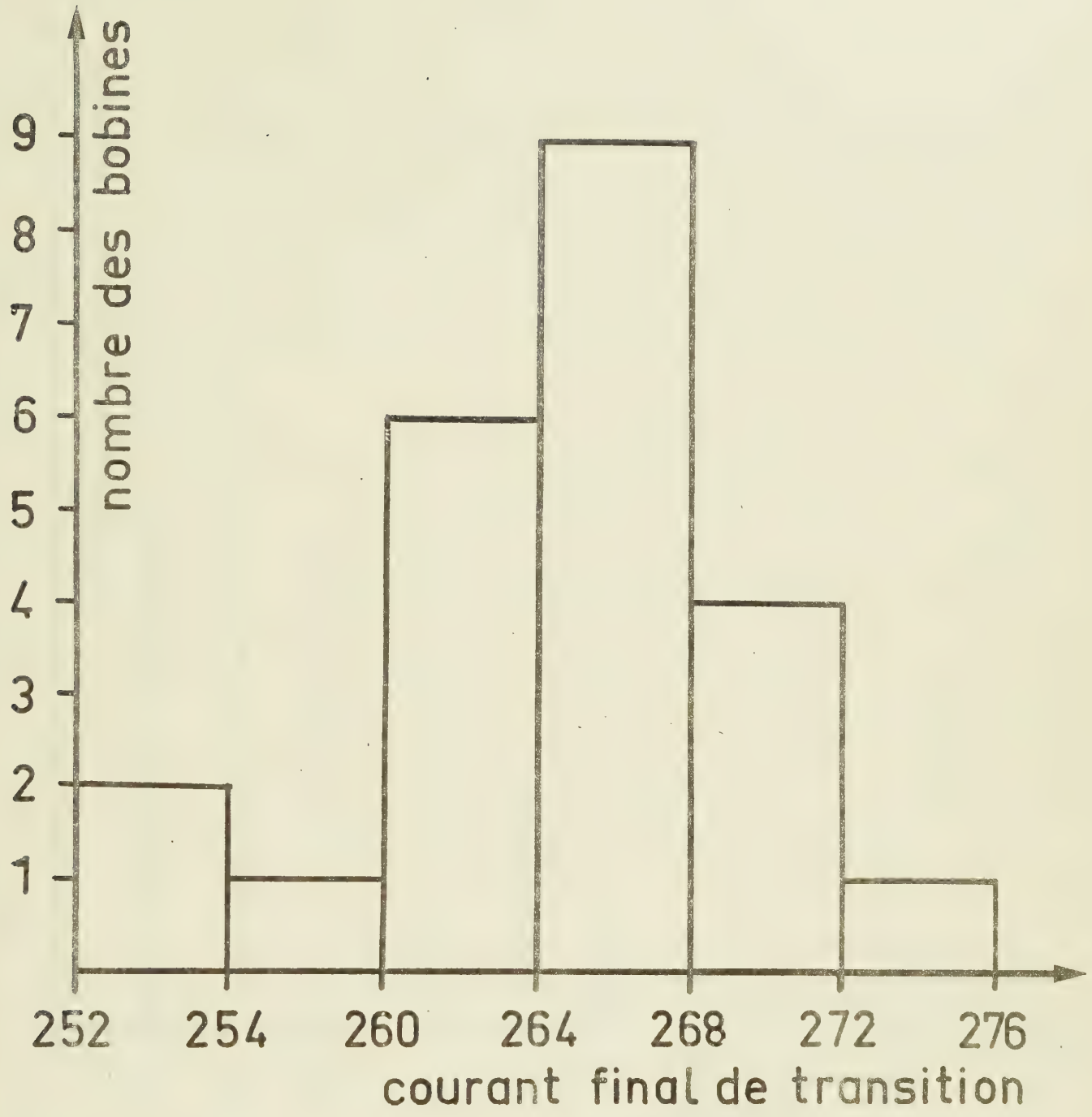
La figure (3-24) indique le nombre de bobine ayant eu un courant de la première transition comprise entre I et I + 25 A, en fonction de I tandis que la figure (3.25) présente les courants finaux de transition qui ont été relevé pour les 23 bobines essayées. Les résultats portés correspondent au nombre de bobines ayant un courant final de transition compris entre I et I + 4A en fonction de I.

Nous constatons que 14 des 23 bobines ont un courant de première transition supérieur à 200 A et que sur l'ensemble 15 ont un courant final de transition compris entre 260 et 268 A.

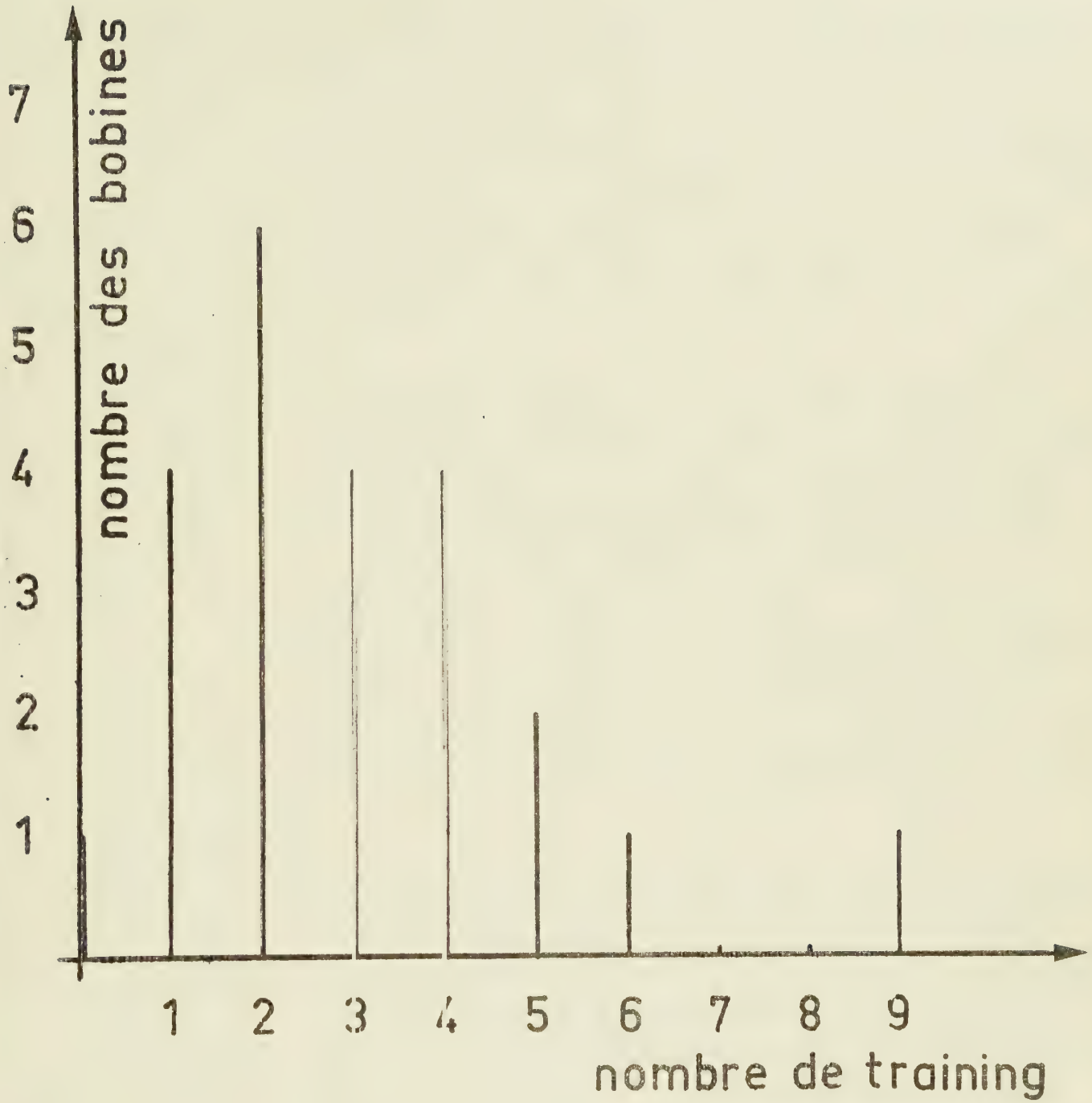
La figure (3-26) présente la répartition du nombre de bobines ayant présenté un effet de "training" en fonction du nombre de transitions intermédiaires. Une seule bobine a atteint son courant final de transition directement et une seule a montré un nombre élevé de transitions intermédiaires (9 transitions).



14/23 des bobines ont un premier courant de transition plus grand que 200 A



15 des 23 bobines ont un courant final de transition entre 260 et 268 A



14/23 des bobines ont (2,3,4) fois de training avant d'arriver au courant final de transition.

3.6. CONSTRUCTION ET ESSAI DE L'INDUCTEUR

Après avoir retenu les vingts bobines ayant montré l'effet de "training" le moins marqué, les phases principales de la réalisation de l'inducteur sont les suivantes

1) le disque central (cf. photo 8) destiné à recevoir les 20 pôles de l'inducteur a été réalisé avec le même matériau que celui utilisé pour le mandrin des bobines inductrices (verre epoxy SILECTO E-G-10).

2) La frette disposée autour de chaque bobine (photo 5) en vue des essais séparés de celles-ci, a été usinée (photo 6) de façon à permettre un assemblage des différents bobinages en forme de voûte autour du disque central [cf. photo 9].

   Les bobines ont été solidarisées avec le disque d'une part à l'aide d'un collage et par l'intermédiaire de chevilles. Le nombre et le diamètre de ces chevilles a été déterminé pour résister à l'effort tranchant dû aux forces centrifuges.

3) Les vingt pôles ont été connectés en série de manière à alterner les pôles Nord et Sud. Ces connexions ont été réalisées en soudant les deux fils supraconducteurs, sur une grande longueur, sur un support constitué par un méplat en cuivre. La soudure utilisée est une soudure à l'étain ordinaire (soudure radio). Le méplat de cuivre est destiné à jouer le rôle de radiateur thermique. La résistance électrique présentée par une soudure est inférieure à $10^{-9}\Omega$ à la température de l'hélium liquide.

4) Enfin à tension constante l'ensemble de bobines est entouré d'une frette disposée à la périphérie de l'inducteur. Cette frette est constituée de 50 couches de ruban de tissu de verre de 20/100 mm d'épaisseur, imprégnée couche par couche avec de l'araldite. La photo (10) montre l'inducteur en cours de frettage. La photo (11) montre l'inducteur une fois terminé. Ses dimensions sont les suivantes :

- Diamètre extérieur de l'inducteur :	90.8 cm
- Diamètre de son axe de rotation :	12 cm
- Diamètre du disque central :	59 cm
- Epaisseur du disque central :	2 cm
- Epaisseur de pôle :	2.45cm
- Epaisseur hors-tout (soudures comprises):	3 cm
- Epaisseur de la frêtte extérieure :	1.2 cm
- Largeur de la frette extérieure :	2.6 cm
- Poids de l'inducteur :	30 Kg

Etant donné le grand diamètre de notre inducteur, les essais de ce dernier n'ont pu être effectués au LGEP. Nous tenons ici à remercier tout particulièrement M.G. BRONCA d'avoir permis que ceux-ci soient réalisés au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay avec l'aide du "SEDAP ", dans un cryostat de 0,95 m de diamètre intérieur et 2 m de hauteur utile. L'inducteur est placé horizontalement au fond de cryostat suspendu à un porte-échantillon élaboré (annexe 2), de manière à minimiser la consommation d'hélium liquide (cf. photo 12).

L'énergie magnétique emmagasinée dans l'inducteur lorsqu'un courant de 200 A y cricule est de l'ordre de 15 KJ. Cette valeur relativement élevée impose d'évaluer la température à laquelle sera portée le point "chaud " de la bobine inductrice qui transitera la première et dans laquelle se dissipera donc une partie de l'énergie de l'ensemble des vingt bobines. Cette évaluation a con-

duit avec des hypothèses pessimistes à une élévation de température de 300°K environ par rapport à celle de l'hélium liquide. Nous avons donc décidé de réaliser un circuit de protection [31] utilisant une résistance de décharge de 1 Ω.

De façon à pouvoir identifié le bobinage qui transite le premier, nous avons utilisé un circuit du type pont de wheastone dont le détail est donné sur la figure (3.27). Les résultats des essais successifs de montée en courant reportés sur la figure (3-28) montrant que l'inducteur complet présente un effet d'accoutumance (training) plus important que celui que présentaient individuellement les pôles qui le constituent. Le courant de transition final obtenu a été de 225 A (cf. fig. 3.28).

Le décalage avec le courant de transition final le plus faible des vingts bobines constituant l'inducteur (260 A) est dû à l'effet coopératif des bobines voisines.

En cours des essais finaux de l'inducteur, nous avons observé que les transitions successives de l'ensemble de l'inducteur se sont produites dans des bobines différentes et non pas toujours dans celle qui avait présenté le plus faible courant critique lors des essais séparés.

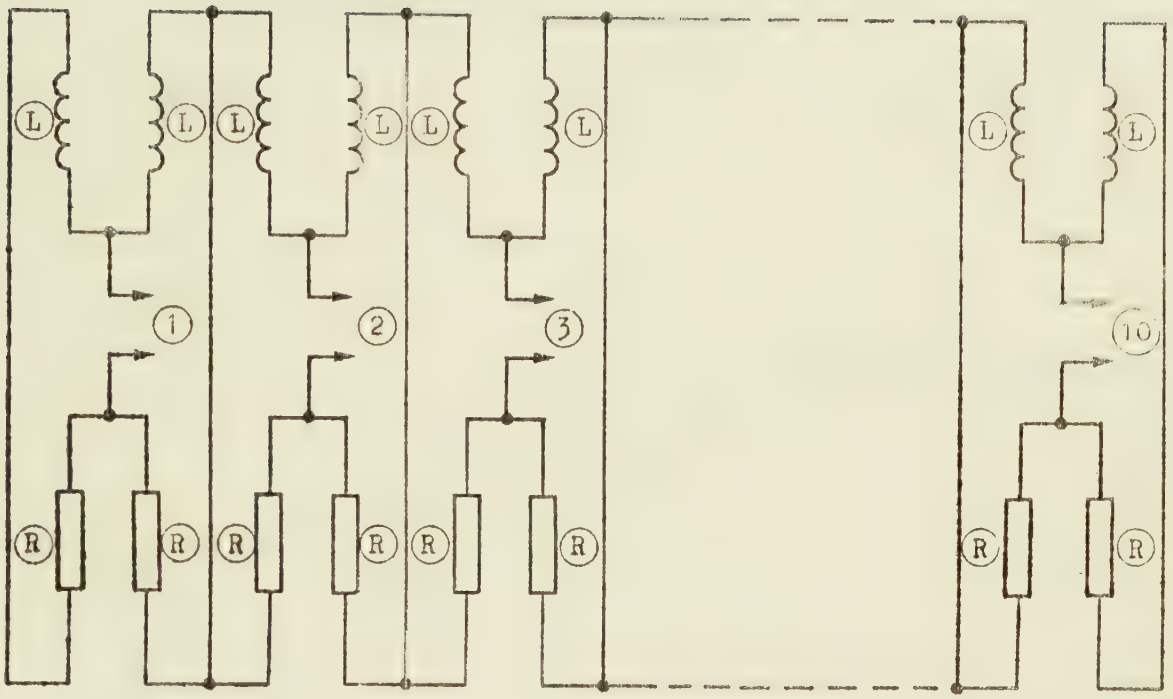
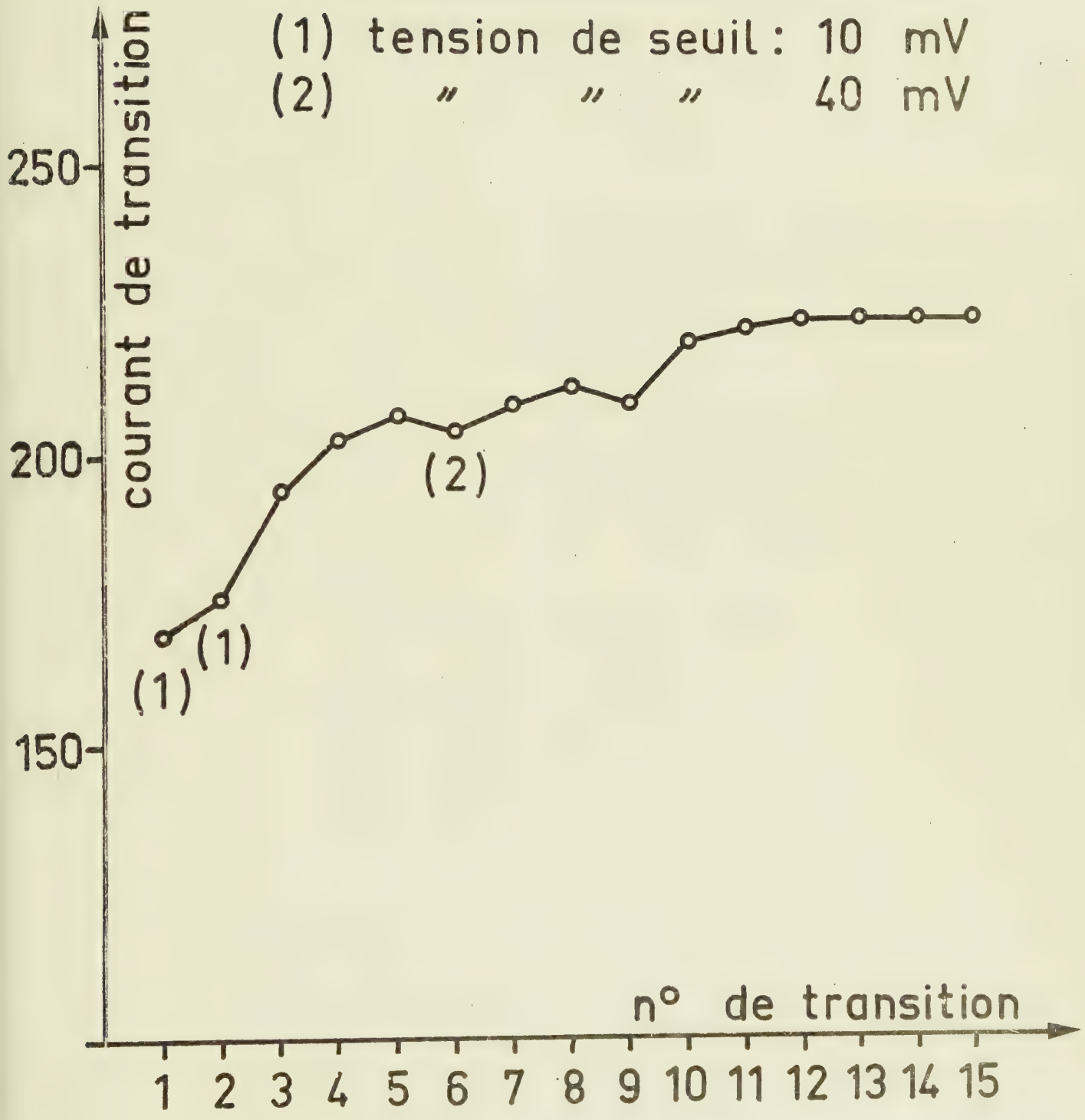


Figure (3-28) : Circuit d'enregistrement de la tension au bornes des bobines

(L) = Bobine inductrice
(R) = Résistance 10 kΩ
(1) = Vers voie 1 de l'enregistreur
(2) = Vers voie 2 de l'enregistreur
(3) = Vers voie 3 de l'enregistreur
(10) = Vers voie 10 de l'enregistreur

tension de seuil du système de protection :
25 mV sauf (1) et (2)



A N N E X E 1

METHODE D'IMPREGNATION DES BOBINAGES

Résine utilisée :

"résine epoxy IMELITE 8103 classe F souple "
avec polimérisation à 155°C.

Cette opération comprend :

1 - Un étuvage des 22 bobines élémentaires pendant 12 heures à 48 heures à 100°C
2 - Un passage sous vide primaire pendant 4 heures
3 - La préparation de la résine epoxy maintenue une heure à 50°C
4 - L'admission de la résine sous vide pendant une heure
5 - La mise en pression de l'ensemble pendant 30 minutes sur pression partielle 2Kgf/cm^2 environ
6 - La remise sous vide primaire pendant 15 minutes
7 - Une dernière mise sous pression (2Kgf/cm^2 15 minutes)
8 - Un passage à l'étuve à 100°C pendant 12 heures
9 - Recommencer les opérations précédentes pour faire une double imprégnation
10 - Après la deuxième imprégnation . passage à l'étuve :
à 100°C pendant 12 heures
à 120°C pendant 6 heures
à 130°C pendant 6 heures
à 140°C pendant 6 heures
à 155°C pendant 6 heures

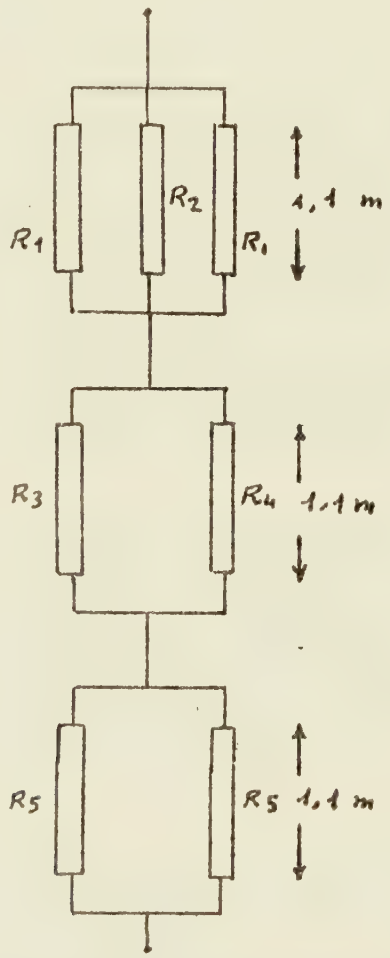
A N N E X E 2

CARACTERISTIQUES DES AMENEES DE COURANT

UTILISEES POUR LES ESSAIS STATIQUES DE L'INDUCTEUR :

les amenées de courant ont été construits avec du ruban de cuivre d'épaisseur et de largeur différentes, constituant les diverses résistances présentées sur le schéma ci-dessous, correspondant à une amenée de courant

R	largeur du ruban	épaisseur
R_1	20 mm	0,25 mm
R_2	10 mm	0,2 mm
R_3	20 mm	0,30 mm
R_4	10 mm	0,2 mm
R_5	10 mm	0,2 mm



- la résistance électrique de chaque aménée de courant à la température ambiante est égale à 8,5 mΩ
- le calcul de la résistance de chaque amenée a donné 3,08 mΩ en supposant que

  R_a est à la température ambiante

  R_b est à la température T = 200°K

  R_c est à la température de l'azote liquide

A N N E X E III

La détermination de la densité de courant maximale admissible dans un inducteur de morphologie donnée impose de déterminer la valeur de l'induction produite par l'ensemble des conducteurs constituant l'inducteur, au point où elle est la plus élevée. Pour mener à bien rigoureusement ce calcul il nous aurait fallu disposer d'un programme de calcul de champ magnétique de quadrupole à répartition de conducteurs épaisse de forme quelconque, et avec écran. N'ayant pas à notre disposition ce programme, nous avons contourné les difficultés de la façon suivante :

1°) On se sert d'un résultat démontré par L. BOYER, stipulant que dans le cas de champs magnétiques plans parallèles dans un milieu de perméabilité μ_0, le champ maximum est atteint en dehors des conducteurs. Ceci démontre dans notre cas que le "point chaud" du quadrupole est sur la courbe délimitant la section droite des conducteurs constituant le bobinage.

2°) Le champ maximum sur le fil étant localisé, d'après le résultat précédent, entre R_i et R_e, comparons dans ce domaine de l'espace les différents termes de la décomposition du champ en série de Fourier dans le cas d'un quadrupole avec ou sans écran.

Posons :

- Dans le cas d'un quadrupole avec écrou

$$(1) \quad H_{rb\,e} = (H_{rb\,e})_f + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{rb\,e})_k$$

$$(2) \quad H_{tb\,e} = (H_{tb\,e})_f + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{tb\,e})_k$$

- Dans le cas d'un quadrupole non écrouté

$$(3) \quad H_{rb} = (H_{rb})_f + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{rb})_k$$

$$(4) \quad H_{tb} = (H_{tb})_f + \sum_{k=1}^{\infty} (H_{tb})_k$$

Le calcul des rapports suivants donne pour une distribution sectorielle épaisse de conducteurs :

$$(5)\qquad \frac{(H_{rb\,e})_f}{(H_{rb})_f} = 1 + \frac{Z^4(1-X^4)}{1-\left(\frac{Ri}{r}\right)^4 + 4\,Lg\,\frac{Re}{r}}$$

$$(6)\qquad \frac{(H_{rb\,e})_k}{(H_{rb})_k} = 1 + \frac{(2-2n)\left(\frac{r}{Rs}\right)^{2n-2} Z^{2n+2}\left(1-X^{2n+2}\right)}{-4n-(2-2n)\left(\frac{Ri}{r}\right)^{2n+2} + (2+2n)\left(\frac{r}{Re}\right)^{2n-2}}$$

$$(7)\qquad \frac{(H_{tb\,e})_f}{(H_{tb})_f} = 1 + \frac{Z^4(1-X^4)}{\left(\frac{Ri}{r}\right)^4 - 1 + 4\,Lg\,\frac{Re}{r}}$$

$$(8)\qquad \frac{(H_{tb\,e})_k}{(H_{tb})_k} = 1 + \frac{(2-2n)\left(\frac{r}{Rs}\right)^{2n-2} Z^{2n+2}\left(1-X^{2n+2}\right)}{-4+(2-2n)\left(\frac{Ri}{r}\right)^{2n+2} + (2+2n)\left(\frac{r}{Re}\right)^{2n-2}}$$

avec

$$n = 2k+1$$

$$Z = \frac{Re}{RS}$$

$$X = \frac{R_i}{R_e}$$

3°) Les différentes morphologies d'inducteurs prises en compte, conduisent à des valeurs différentes de Z et de X. Il est possible dans chaque cas de calculer les rapports correspondants donnés par (5), (6), (7) et (8). Dans le cas le plus défavorable (X = 0,9 $r = R_e$ et $Z = \frac{1}{2}$)

on a

(9) $$(H_{rbe})_f = 1,06\ (H_{rb})_f$$

(10) $$(H_{rbe})_k = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\right] (H_{rb})_k$$

Soit :

(11) $$H_{rb} < H_{rbe} < 1,06\ H_{rb}$$

et

(12) $$(H_{tbe})_f = 0,94\ (H_{tb})_f$$

(13) $$(H_{tbe})_k = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\right] (H_{tb})_k$$

soit

(14) $$0,94 H_{tb} < H_{tbe} < H_{tb}$$

4°) On déduit des résultats précédent que l'on ne fait pas une grosse erreur sur le calcul du champ au "point chaud "du bobinage en négligeant le role de l'écrou. On peut alors utiliser le calcul numérique du paragraphe 2-6.

REMARQUE

Contrairement au cas précédent, le rôle joué par l'écrou pour $r > R_e$, c'est-à-dire au niveau de l'induit est très important. On peut le montrer sur l'exemple suivant en calculant les rapports des composantes de champ magnétique définis précédemment. Il vient pour $r > R_e$

$$(15) \quad \frac{(Hre)}{(Hr)_f} = 1 + \frac{Z^4}{\left(\frac{Re}{r}\right)^4}$$

$$(16) \quad \frac{(Hre)_k}{(Hr)_k} = 1 + \left(\frac{r}{Rs}\right)^{4n}$$

$$(17) \quad \frac{(Hte)_f}{(Ht)_f} = 1 - \frac{Z^4}{\left(\frac{Re}{r}\right)^4}$$

$$(18) \quad \frac{(Hte)_k}{(Ht)_k} = 1 - \left(\frac{r}{Rs}\right)^{4n}$$

On voit que pour $r = R_s$ c'est-à-dire au niveau de l'écrou on double pratiquement la composante radiale du champ magnétique.

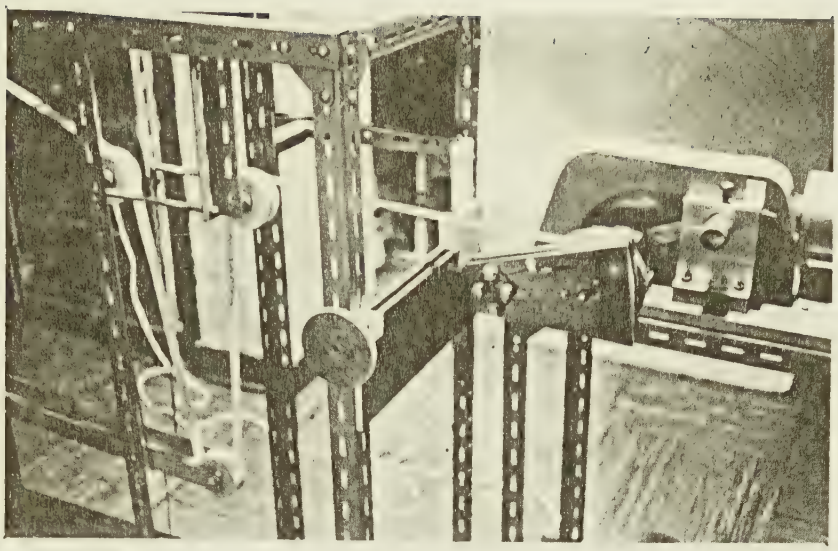


Photo (1) : Machine à bobiner à tension constante réalisant le frettage d'une bobine inductrice.

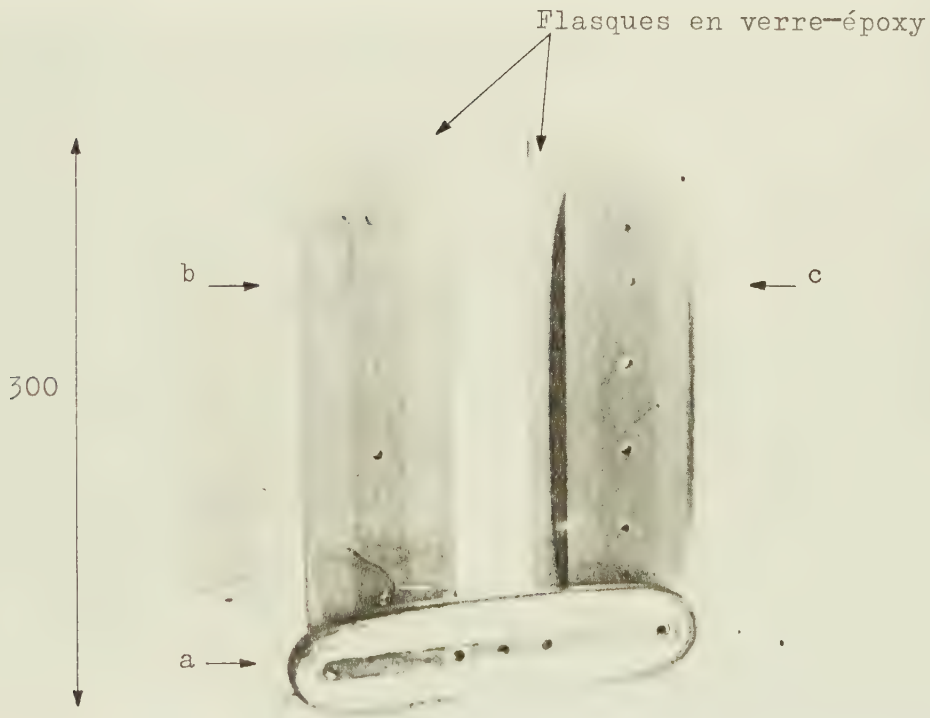


Photo (2) : Différentes bobines d'essai :

a : Bobine avec drain thermique (ruban cuivre)
b,c : Bobines rectangulaires utilisant un isolant (tissu de verre). Mandrin et flasques sont réalisés en verre-époxy.

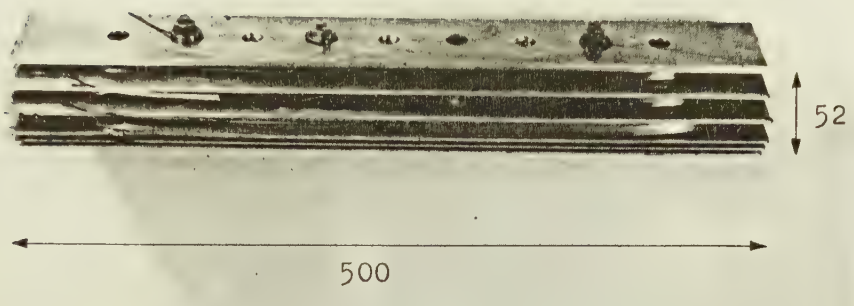


Photo (3) : Pole d'essai d'un quadripole cylindrique à répartition hyperbolique.

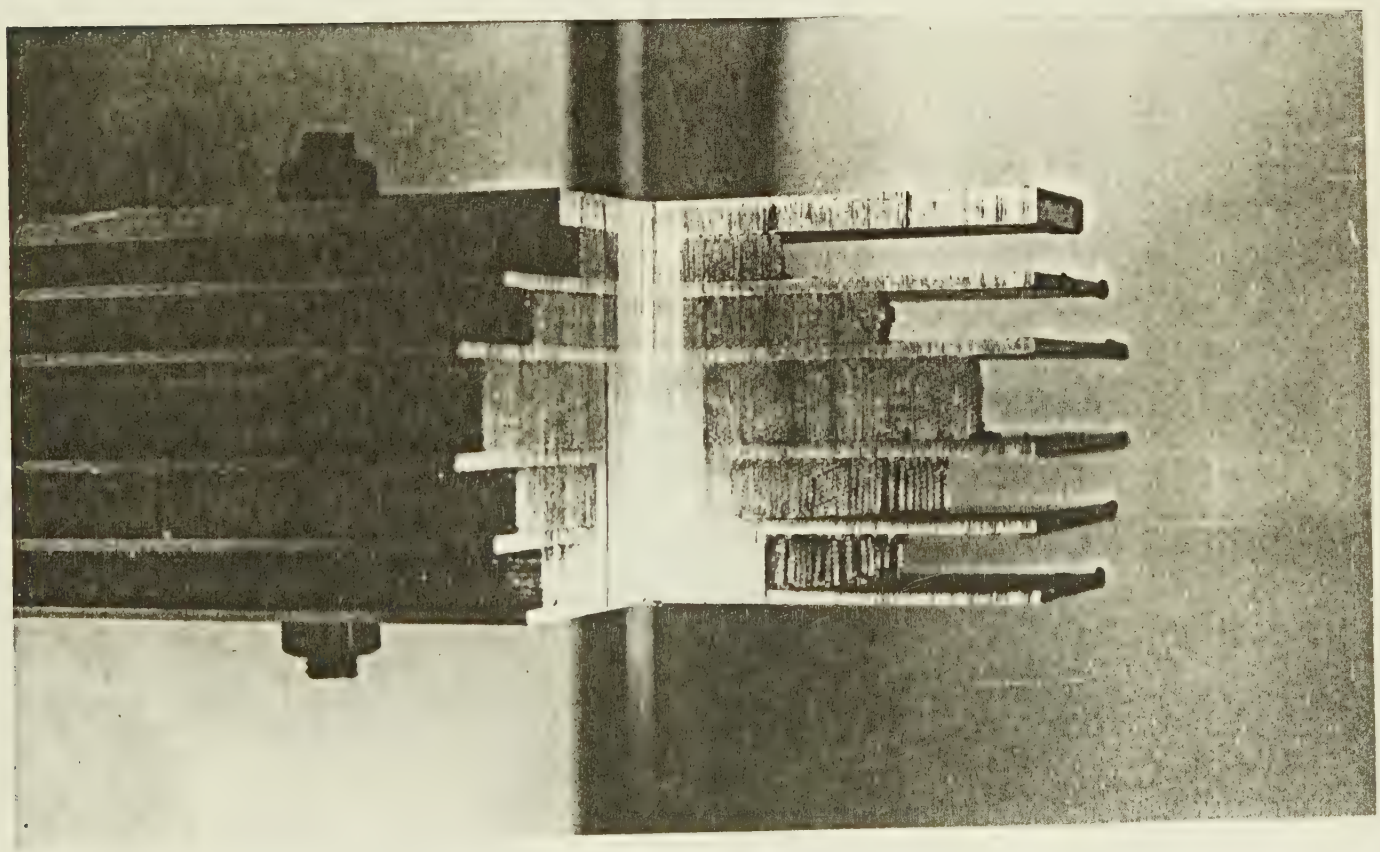


Photo (4)

La frette a un double rôle. Elle permet l'essai individuel de chaque bobine. Après usinage, elle assure un assemblage en voute des différentes bobines à la périphérie du disque porteur.

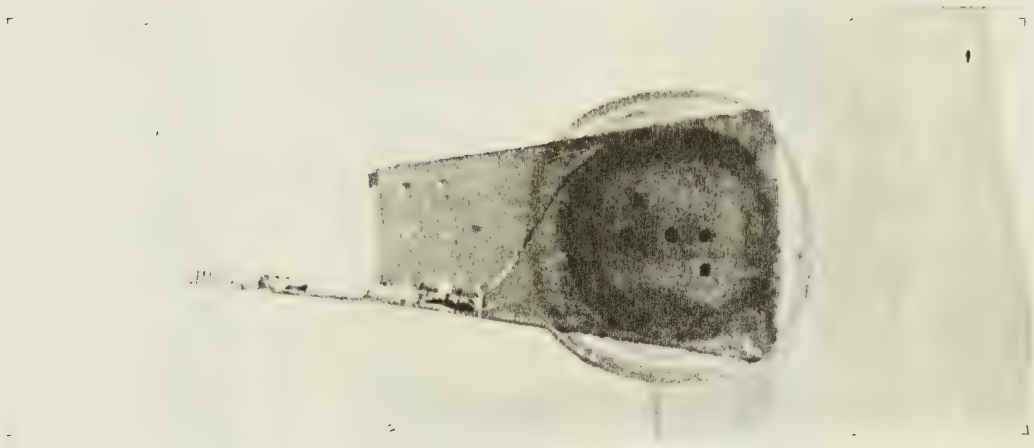


Photo (5) : Bobine constituant un pôle inducteur après imprégnation et frettage.

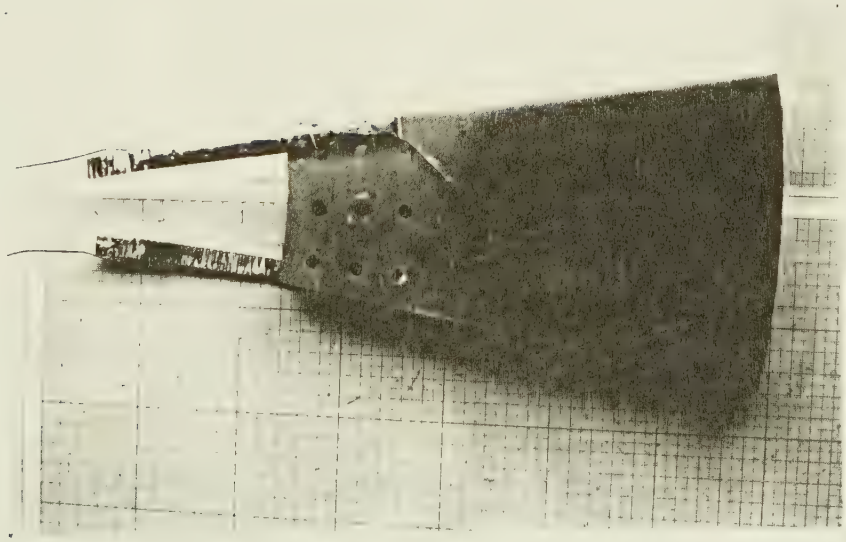


Photo (6) : Forme définitive du même bobinage avant son assemblage sur le disque de l'inducteur.

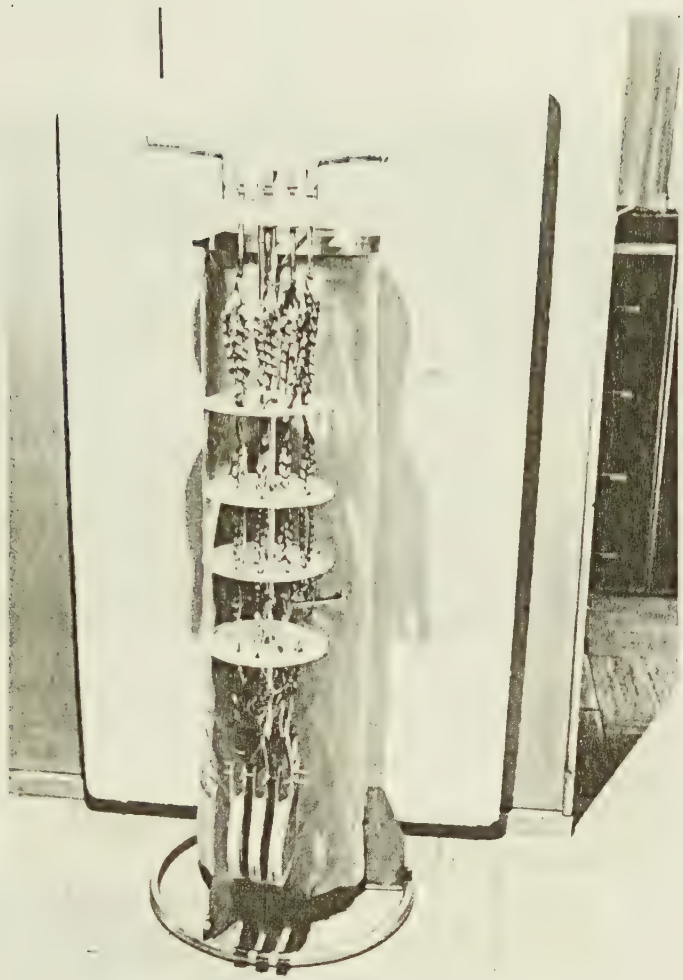


Photo (7) : Groupe de trois bobines fixées sur leur porte échantillon.

Photo (8) : Ensemble des bobines inductrices avant leur assemblage sur le disque porteur.

Photo (9) : Les bobines sont montées autour du disque central

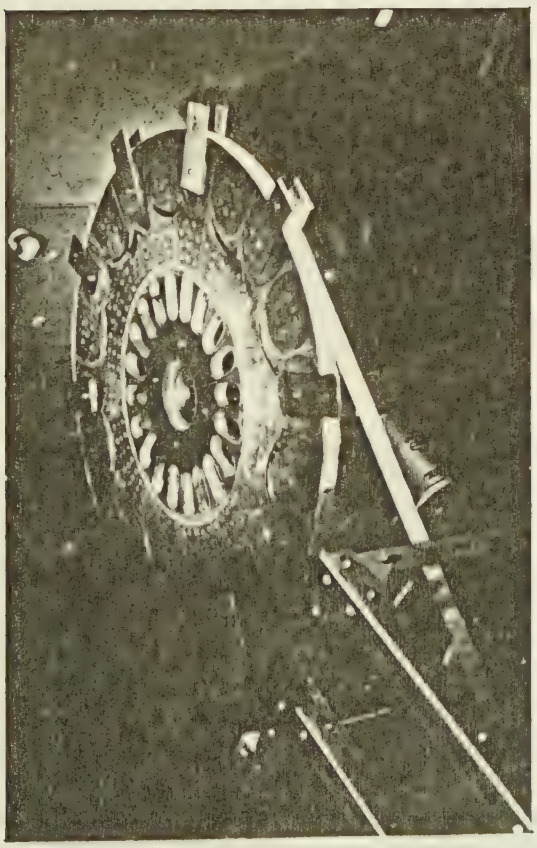


Photo (10) : L'inducteur est monté sur la machine à bobiner pour être fretté

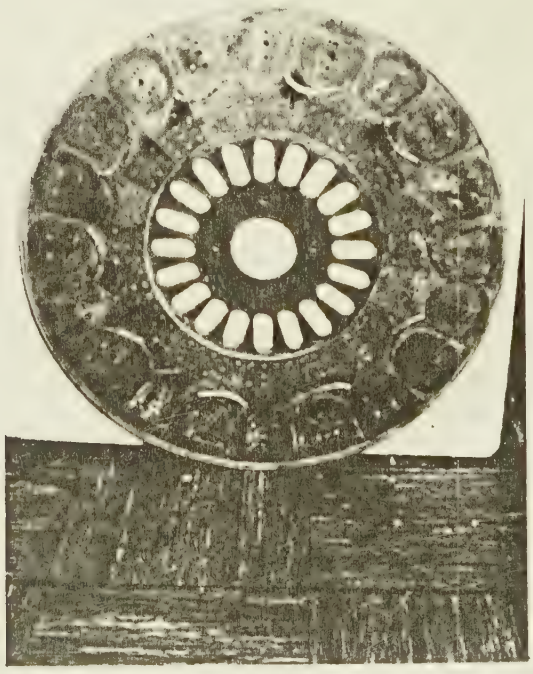


Photo (11) : L'inducteur dans son état final pret à être utilisé

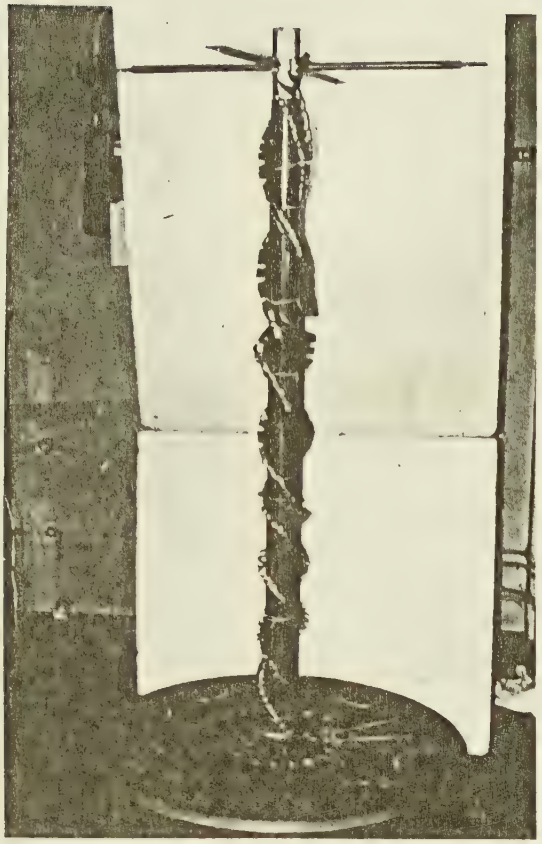


Photo (12) : Inducteur monté sur le porte échantillon pour l'essai statique.

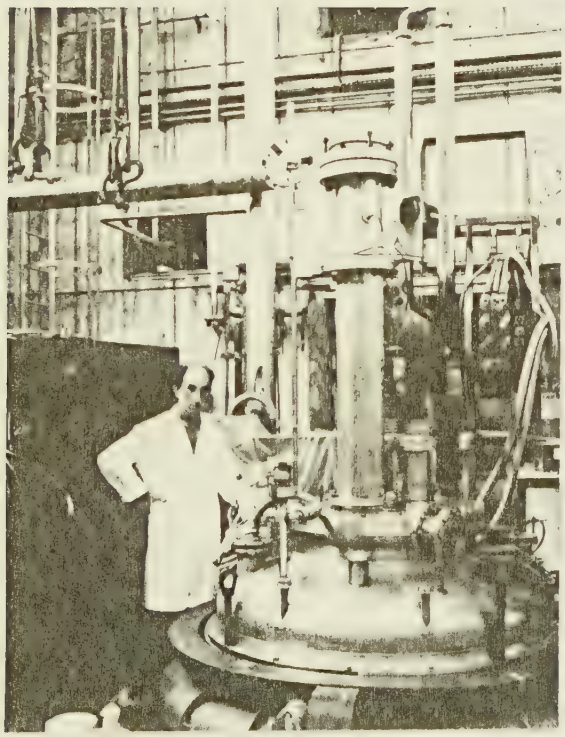


Photo (13) : Vue du cryostat dans lequel l'inducteur est essayé.

R E F E R E N C E S

[1] - J.L. SMITH, Jr. "Application of Superconductors To A.c. Generators ".
Fifth Conference International on Magnet Technology (M.T-5) Roma 1975.
Proceedings edited by : N. Sacchetil, M. Spadoni, S. Stipcich.

[2] - H.H. WOODSON, Z.J.J. STEKLY, and E. HALAS
"A Study of Alternators with Superconducting field winding I- Analysis ".
IEEE Trans. Power Apparatus and Systems Vol. Pas-85, N° 3, March 1966.

[3] - Z.J.J. STEKLY, H.H. WOODSON, A.M. HATCH, L.O. HOPPIE, and E. HALAS
"A Study of Alternators with Superconducting field windings, II- Experiment "
IEEE Trans. power Apparatus and Systems.
Vol., PAS 85, N° 3, March 1966

[4] - C.J. OBERHAUSER and H.R. KINER
"Some Considerations in the design of Superconducting Alternators "
Advances in cryogenic Engineering, Vol. 13, K.D. Timerhaus, Editor 1968

[5] - P. THULEN, J.C. DUDLEY, D.L. GREENE, J.L. SMITH, Jr., H.H. WOODSON
"An experimental Alternator with a Superconducting rotating field winding ".
IEEE Trans. power apparatus and system.
Vol., PAS 90, n°2, March-Avril.

[6] - I.A. GLEBOV : "Superconducting Magnet Systems and electrical Machines "
IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-II, n° 2, March 1975.

[7] - E. Yu. KLIMENKO et al : "100 Kw Alternating Current Generator with a Superconducting Solenoid "
Report I AE-2182, I.V. Kurchatov institute of Atomic Energy. 1972 Moscow USSR (en Russe)

[8] - D. ECKERT, F. LANGE, M. ENDING, G. MULLER and W. SEIDEL
" Three-phases Synchronous alternator with superconducting field winding ".
Proceedings of the 1972 Applied superconductivity conference IEEE Pub. N° 72 CH 0682-TABSC.

[9] - S. AKIYAMA, H. JUJINO, A. ISHIHARA and K. VEAD
"Superconducting Synchronous Machines "
Paper presented at ICEC, 5 May 1974, KYOTO, Japon.

[10] - A. BEJAN, T.A. KEIM, J.L. KIRTLEY, Jr., J.L. SMITH, Jr, P. THULLEN and G.L. WILSON
"Superconducting Alternator test results "
Paper M-3 Cryogenic Engineering Conference Atlanta 1973.

[11] - A. BEJAN : "Superconducting field winding for a 2 MVA Synchronous Generator "
M.I.T. (Thesis).

[12] - J.K. HULM, E.F.M. CANN, C.J. MOLE and J.H. PRKER, jr.
"Development of a 5 MVA Superconducting Generator, General aspects."Wistinghouse.
Paper presented at the IEEE winter Meeting New York 28 January-2 Feb. 1973.

[13] - W.C. BRENNR, D.W. DEIS, R.F. EDWARDS, H.E. HALLER, III, C.J. HOLE, C.C. STERRETT, M.S. WALKER and L.N. WEDMAN
"Development of 5 MVA Superconducting Generator, electrical design and performence ".
Wistinghouse.
Paper presented at the IEEE winter meeting New york 28 Janvier- 2Feb. 1973.

[14] - Y.W. CHANG, C.K. JONES, S. KARPATHY, D.C. LITZ, A. PATTERSON and M.S. WALKER
"Development of a SMVA Superconducting Generator. Testing and Evaluation "
Wistinghouse. Paper presented at the IEEE winter meeting New York, 28 Janv. - 2 Feb. 1973.

[15] - T.G. FAGAN, Jr., D.C. LITZ, J.H. MURPHY, A. PATTERSON, C.C. STERRETT, D.R. STONER and A. ULKE
"Development of a SMVA Superconducting Generator, mechanical and cryogenic design "
Wistinghouse.
Papers presented at the IEEE winter meeting New York, 28 Jan.-2 Feb. 1973.

[16] - J.H. PARKER et al
"A high speed Superconducting Rotor "
IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-11, March 1975.

[17] - R. ROCHEROLLES : "Principe des machines à compensation de couple. Exemple de machines à trois enroulements "
Journée d'étude sur les machines tournantes supraconductrices, Gif-Sur-Yvette, France, SEE Section 12, 9-12-1975.

[18] - A. MAILFERT, M. RENARD :
"Machines électriques synchrones à inducteur supraconducteur "
Brevet d'invention demandé le 21 Fév. 1973 numéro 73.06.118 (ANVAR).

[19] - Z.J.J. STEKLY : "State of art of superconducting magnetes" Journal of applied physics, vol. 42, n° 1, January 1971.

[20] - L. BOYER : "Perfectionnements aux machines électriques tournantes à bobinage supraconducteur " Brevet français, n° 74 19671, Etablissement public dit (ANVAR).

[21] - D.F. WARNE and M.E. HADLOW : "Superconducting a.c. machines : an approach to development " Electrical Research Association, Leatherhead, Surrey, England.

[22] - J. FAVEREAU et Melle CLAUDE : "Quadrupoles Supraconducteurs " Extrait du bulletin de la Société française des électriciens 8ème série, tome V, N° 58, Octobre 1964

[23] - J.P. CHABRERIE : "Application de la méthode tensorielle au calcul des efforts dans les machines électriques homopolaires à symétrie de révolutions" 422/RGE, Tome 79, 5 Mai 1970.

[24] - C. RIOUX : "Théorie générale comparative des machines électriques établie à partir des équations du champ électromagnétique 416/RGE. Tome 79 n° 5, Mai 1970.

[25] - J.L. SMITH, Jr., THOMAS A. KEIM : "Applications of Superconductivity to AC rotating machines " Superconducting machines and devices. Large Systems Applications Edited by Simon Foner and Brian B. Schwartz (MIT) Cambridge. Plenum Press, New York and London.

[26] - E. DURAND ; "Magnétostatique " Masson and Cte Editeurs, 120 Bd St Germain Paris 6°, 1968.

[27] - J.H. PARKER, Jr, R.D. BLAUGHER, A. PATTERSON and P.D. VECCHIO and J.L. McCABRIA : " A high speed superconducting rotor " IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-11, n° 2, March 1975

[28] - Stratifiés techniques DROUET-DIAMOND Caractéristiques Générales... 72, rue du LANDY 93 - La Plaine St Denis

[29] - Nouvelles cryogéniques du C.E.A.
Coopération industrielle 29, rue de la fédération B.P. 510 75752 PARIS Cedex 15 n° 3 Juillet 1975

[30] - A. MAILFERT : "Sur les machines électriques tournantes Hétéropolaires sans circuit magnétique "
R.G.E. Février 1967, 22 rue Galilée Paris 16°

[31] - J.L. BRET, G. DEVELEY, J.P. FAUR E, J.C. VALLIER : "Comportement contrôlé de deux enroulements supraconducteurs GIGOGNES lors du rétablissement de l'état normal ".
Revue de Physique appliquée. Tome 9. Sept. 1974

B I B L I O G R A P H I E

1 - R.V. HARROWELL : "Preliminary studies of superconducting alternators "
Cryogenics, 109, April, 1972.

2 - A.D. APPLETON and A.F. ANDERSON :
"Developments with superconducting generators "
Electrical Engineering Department, international research and Development Company Limited, Newcastle-upon-type, England.

3 - B.E. MULBALL : "Windings for superconducting Machines "
international research and development Co. LTd Newcastle-upon-type, U.K.

4 - Z.J.J. STEKLY : "State of art of superconducting magnetics "
Journal of Applied physics, Vol. 42, n° 1, January 1971

5 - H.H. WOODSON, J.L. SMITH Jr, P. THULLEN and L. KIRTLY
"The Application of Superconductor in the field winding of large synchronous machines."
IEEE Transactions on power apparatus and system Vo PAS-90, n° 2, March/April 1971

6 - M.E.G. HADLOW, J.A. BAYLIS, B.C. LINDLEY :
"Superconductivity and its applications to power Engineering"proc. IEE, IEE Reviews, Vol. 119, n° 8R, August 1972.

7 - Z.J.J. STEKLY and H.H. WOODSON :
"Rotating Machinery utilizing superconductors "
IEEE Transactions on Aerospace, Vol. 2, N° 2, April 1964

8 - Z.J.J. STEKLY and G.Y. ROBINSON Jr :
"Cryogenic aspects of rotating superconducting field coil for superconducting machines "
Magnetic Corporation of america.

9 - J.T. HAYDEN : "Superconducting generators for aircraft "
Cranfield institute of technology, Cranfield England.

10 - D.F. WARNE and M.E. HADLOW :
"Superconducting a.c. machines, an approach to development "
Electrical Research Association, Leatherhead, Surrey, England.

11 - C.J. MOLE, Manager, C.C. STERRETT, Lar, Program Manager :
"A superconducting Machines for Central Station Power Generation. Superconducting Electrical Machinery Systems "
Westinghouse Electric Corporation, Pittsburgh, Pennsylvania.
Paper presented at American Power conference 35th annual Meeting May 8-10, 1973, Chicago, Illinois.

12 - EDWARD F. MC Cann II, C.J. MOLE :
"Superconducting electric propulsion systems for Mechant and naval ship concepts "
Westinghouse electric corporation, Pittsburgh, Pennsylvania.
paper presented at the American Annual Meeting New York N.Y., November 15-17, 1973 of the society of Naval Architects and Marine Engineerings.

13 - M.S. BALDWIN, C.C. STERRETT :
"The potential impact of superconducting turbine generators on the Electric utility industry "
Westinghouse Electric Corporation Pittsburgh, Pennsylvania.
Paper presented at American Power Conference 36th Annual Meeting, April 29-30, and May 1, 1974.

14 - J. SMITH : "Superconducting Apparatus with double armature structure "
United States Patent 37 42 265, June 26, 1973

15 - L. BOYER, A. MAILFERT, M. RENARD :
"Les Applications de la supraconductivité, alternateurs supraconducteurs à compensation du couple ".
RGE, Octobre 1974, t. 85, n° 10.

16 - A. BEJAN : "Material selection for the torque tubes of large superconducting rotating machinery.
Cryogenics, June 1974.

17 - D.C. LARBALESTIER and H.W. KING :
"Problems with stainless steel formers for superconducting magnets "
Cryogenics, October 1970.

18 - D.C. LARBALESTIER and H.W. KING :
Prediction of the low temperature stability of type 304 stainless steel from room temperature deformation test.
Metallurgy department imperial college London.

19 - B. COLYER, M.T. BALL and M.P. CAMPHELL :
"The work of fracture of epoxy resins."
Cryogenics May 1974.

20 - P. THULLEN, T.A. KEIM, J.V. MINERVINI :
"Multipole superconducting electric motors for ship propulsion "
Office of Naval Research, contract N° 001 4-67-A 0204-0068.

21 - J. THURIN : "Electricité Générale "
Editions EYROLLES 1965, 61 Bd St Germain Paris V°

22 - FAVEREAU "Cours d'électrotechnique (Ecole Centrale)
Tome II, 1972.